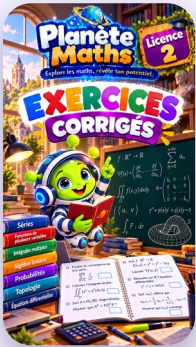


Réduction des endomorphismes : exercices corrigés de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Un vecteur propre est-il propre ?



On calcule $Mu = (1 \cdot 1 + 2 \cdot 1, 3 \cdot 1 + 0) = (3, 3) = 3u$ avec $u \neq 0$: u est un vecteur propre associé à la valeur propre 3 (1 pt).

Pour w : $Mw = (1 + 4, 3) = (5, 3)$. Si w était propre, on aurait $(5, 3) = \lambda(1, 2)$, donc $\lambda = 5$ par la première coordonnée et $2\lambda = 10 \neq 3$: contradiction. Le vecteur w n'est pas un vecteur propre de M .

2 Polynôme caractéristique d'une matrice 2x2



$\text{tr}(N) = 7$ et $\det(N) = 10 + 2 = 12$, donc $\chi_N(x) = x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$.

Les valeurs propres sont 3 et 4.

Pour $\lambda = 3$: $N - 3I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, le système se réduit à $x = y$, d'où $E_3 = \text{Vect}((1, 1))$.

Pour $\lambda = 4$: $N - 4I = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, d'où $x = 2y$ et $E_4 = \text{Vect}((2, 1))$.

3 Valeurs propres d'une matrice triangulaire



Le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire est le produit des $(x - a_{ii})$:

$\chi_T(x) = (x - 2)(x + 3)(x - 7)$. Les valeurs propres sont 2, -3 et 7.

La trace vaut $2 - 3 + 7 = 6$ et le déterminant $2 \times (-3) \times 7 = -42$. Trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$ pour une matrice 3×3 : T est diagonalisable.

4 Vrai ou faux avec justification



a. Vrai : il existe $v \neq 0$ avec $Av = 0$, donc $\ker A \neq \{0\}$ et A n'est pas inversible (1 pt).

b. Faux : si $Av = \lambda v = \mu v$ avec $v \neq 0$, alors $(\lambda - \mu)v = 0$, donc $\lambda = \mu$.

c. Faux : $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $x^2 + 1$, sans racine réelle.

Elle représente la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, qui ne laisse aucune direction invariante.

5 Calculer une puissance par diagonalisation



$MP = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et $PD = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, donc $MP = PD$. Comme $\det P = -5 \neq 0$, P est inversible et $M = PDP^{-1}$.

On a $P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D^4 = \text{diag}(81, 16)$. Alors $PD^4 = \begin{pmatrix} 81 & 32 \\ 81 & -48 \end{pmatrix}$ et

$M^4 = PD^4P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 275 & 130 \\ 195 & 210 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 & 26 \\ 39 & 42 \end{pmatrix}$.

6 Une suite à vérifier



On a $v_{n+2} = 9 \cdot 3^n + 16 \cdot 4^n$. D'autre part,

$7v_{n+1} - 12v_n = 7(3 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^n) - 12(3^n + 4^n) = 9 \cdot 3^n + 16 \cdot 4^n$. Les deux expressions coïncident.

Ici $v_0 = 2$ et $v_1 = 7$. Le polynôme $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$ a pour racines **3** et **4**, les bases des deux termes de la suite.

7 Valeurs propres d'une matrice compagnon



$\text{tr}(K) = 5$, $\det(K) = 6$, donc $\chi_K(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

On a $K(1, \lambda) = (\lambda, -6 + 5\lambda)$. Cette image vaut $\lambda(1, \lambda) = (\lambda, \lambda^2)$ exactement lorsque $\lambda^2 = 5\lambda - 6$, c'est-à-dire $\chi_K(\lambda) = 0$. Ainsi **(1, 2)** est propre pour **2** et **(1, 3)** est propre pour **3**.

8 Diagonaliser une matrice 3x3



a. En développant selon la deuxième ligne :

$$\chi_{B_2}(x) = (x - 3)((x - 2)^2 - 1) = (x - 3)(x - 3)(x - 1) = (x - 3)^2(x - 1) \text{ (1 pt).}$$

b. Pour $\lambda = 1$: $B_2 - I$ donne $x + z = 0$ et $2y = 0$, donc $E_1 = \text{Vect}((1, 0, -1))$. Pour

$\lambda = 3$: les lignes de $B_2 - 3I$ se ramènent à $x - z = 0$, un plan :

$$E_3 = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 0)) \text{ (2 pts).}$$

c. $\dim E_3 = 2 = m_3$ et $\dim E_1 = 1 = m_1$: B_2 est diagonalisable avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{diag}(3, 3, 1), \text{ ce que confirme } B_2 P = P D.$$

9 Une matrice non diagonalisable



$\text{tr}(C_1) = 6$, $\det(C_1) = 5 + 4 = 9$, donc $\chi_{C_1}(x) = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$. La seule valeur propre est **3**, de multiplicité **2**.

$C_1 - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ est de rang **1** (deuxième ligne égale à -2 fois la première), donc E_3 est de dimension **1** : $E_3 = \text{Vect}((1, -2))$. Comme $\dim E_3 = 1 < 2 = m_3$, C_1 n'est pas diagonalisable. Si elle l'était, elle serait semblable à $3I$, donc égale à $3I$, ce qui est faux.

10 Trigonaliser



On complète u par $v = (0, 1)$: (u, v) est une base car $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ (1 pt).

$C_1 u = 3u$ et $C_1 v = (1, 1) = u + 3v$ car $u + 3v = (1, -2 + 3) = (1, 1)$. Dans la base (u, v) , la matrice est $T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie

$$C_1 P = P T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \text{ (2 pts).}$$

11 Étude avec un paramètre



$$\chi_{M_a}(x) = (x - 1)^2 - a \text{ (1 pt).}$$

- Si $a > 0$: deux racines distinctes $1 \pm \sqrt{a}$, donc M_a est diagonalisable.
- Si $a = 0$: $\chi = (x - 1)^2$ et $M_0 - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang **1**, donc $\dim E_1 = 1 < 2$: non diagonalisable.
- Si $a < 0$: pas de racine réelle, donc non diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (elle le devient sur $\mathbb{C}$, avec les valeurs propres $1 \pm i\sqrt{-a}$).

12 Inverse par Cayley-Hamilton



On sait que $\chi_N(x) = x^2 - 7x + 12$, donc $N^2 - 7N + 12I = 0$ (1 pt). Alors

$$N(7I - N) = 12I \text{ et } N^{-1} = \frac{1}{12}(7I - N) = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vérification : } N \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = 12I.$$

13 Puissances par polynôme annulateur



$S^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $3S - 2I = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où $S^2 = 3S - 2I$, c'est-à-dire que $(x - 1)(x - 2)$ annule S (1 pt).

On écrit $x^n = Q(x)(x - 1)(x - 2) + \alpha x + \beta$. En $x = 1$: $\alpha + \beta = 1$; en $x = 2$:

$2\alpha + \beta = 2^n$, donc $\alpha = 2^n - 1$ et $\beta = 2 - 2^n$. Comme $Q(S) \cdot 0 = 0$,

$$S^n = (2^n - 1)S + (2 - 2^n)I = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (2 pts). Pour } n = 1, \text{ on retrouve } S.$$

14 Une suite par réduction



Avec $X_n = (u_n, u_{n+1})^T$, on a $X_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} X_n$. Le polynôme caractéristique est $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$: valeurs propres **3** et **-2**, distinctes, donc la matrice est diagonalisable (1 pt).

Ainsi $u_n = \alpha 3^n + \beta (-2)^n$. Avec $\alpha + \beta = 0$ et $3\alpha - 2\beta = 5$, on obtient $\alpha = 1, \beta = -1$:

$u_n = 3^n - (-2)^n$. Contrôle : $u_2 = 9 - 4 = 5 = u_1 + 6u_0$ (2 pts).

15 Spectre d'une fonction de matrice



Trois valeurs propres distinctes dans $\mathbb{R}$ pour une matrice d'ordre **3** : A est diagonalisable, donc semblable à $\text{diag}(1, 2, 4)$.

$\text{tr}(A) = 7$ et $\det(A) = 8$. Les valeurs propres de A^{-1} sont $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, d'où $\text{tr}(A^{-1}) = \frac{7}{4}$.

Celles de $A^2 + I$ sont **2, 5, 17**, d'où $\det(A^2 + I) = 170$.

16 Deux populations en interaction

★★★★

Avec $X_n = (x_n, y_n)^T$, $X_{n+1} = MX_n$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique $(x - 3)(x + 2)$, avec $E_3 = \text{Vect}((1, 1))$ et $E_{-2} = \text{Vect}((2, -3))$ (1 pt).

On décompose $X_0 = (5, 0) = 3(1, 1) + 1 \cdot (2, -3)$. Alors

$X_n = 3 \cdot 3^n(1, 1) + (-2)^n(2, -3)$, soit $x_n = 3^{n+1} + 2(-2)^n$ et $y_n = 3^{n+1} - 3(-2)^n$ (2 pts). Contrôle : $x_1 = 9 - 4 = 5$ et $y_1 = 9 + 6 = 15 = 3x_0$.

Comme $(-2)^n/3^n \rightarrow 0$, $\frac{x_n}{y_n} = \frac{3 + 2(-2/3)^n}{3 - 3(-2/3)^n} \rightarrow 1$. Les deux populations deviennent équivalentes (1 pt).

17 Réduction et polynôme minimal

★★★★

La matrice est triangulaire : $\chi_{K_3}(x) = (x - 2)^3$ (1 pt).

$K_3 - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc $\dim \ker(K_3 - 2I) = 2 < 3$: K_3 n'est pas diagonalisable.

Le polynôme minimal divise $(x - 2)^3$ et a pour racine 2. On a $K_3 - 2I \neq 0$ mais

$(K_3 - 2I)^2 = 0$ (le seul coefficient non nul se multiplie par un zéro). Donc

$\mu(x) = (x - 2)^2$, qui n'est pas à racines simples, ce qui confirme la non-diagonalisabilité (2 pts).

18 Projecteur et diagonalisation

★★★★

$$P_0^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P_0 \text{ (1 pt).}$$

Le polynôme $x^2 - x = x(x - 1)$ annule P_0 et est scindé à racines simples : P_0 est diagonalisable, de valeurs propres possibles 0 et 1 (1 pt).

$E_1 = \ker(P_0 - I) : x - 2y = 0$, d'où $E_1 = \text{Vect}((2, 1))$. $E_0 = \ker P_0 : 2x - 2y = 0$, d'où $E_0 = \text{Vect}((1, 1))$. Ainsi $\mathbb{R}^2 = E_0 \oplus E_1$ et $\text{tr}(P_0) = 1 = \text{rang}(P_0)$ (2 pts).

19 Valeurs propres complexes

★★★★

$\chi_Z(x) = x^2 - 2x + 2$, de discriminant $4 - 8 = -4 < 0$: aucune racine réelle, donc aucune valeur propre réelle (1 pt).

Sur $\mathbb{C}$, les racines sont $1 + i$ et $1 - i$, distinctes, donc Z est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (1 pt).

$Z^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, puis $Z^4 = (Z^2)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I$. On retrouve que $(1 + i)^4 = -4$, cohérent avec les valeurs propres (2 pts).

20 Suite d'ordre trois

★★★★

Avec $X_n = (u_n, u_{n+1}, u_{n+2})^T$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ (1 pt). Alors

$\chi_Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$, car $1 - 6 + 11 - 6 = 0$, $8 - 24 + 22 - 6 = 0$ et $27 - 54 + 33 - 6 = 0$ (1 pt).

Trois valeurs propres distinctes : Q est diagonalisable et $u_n = a + b2^n + c3^n$. Les conditions $a + b + c = 0$, $a + 2b + 3c = 1$, $a + 4b + 9c = 5$ donnent par différences $b + 2c = 1$ et $2b + 6c = 4$, d'où $c = 1$, $b = -1$, $a = 0$: $u_n = 3^n - 2^n$ (2 pts).

Enfin $u_{10} = 59049 - 1024 = 58025$ (1 pt).

21 Démonstration : vecteurs propres libres

★★★★

Supposons $av_1 + bv_2 = 0$ (1). En appliquant f : $a\lambda_1 v_1 + b\lambda_2 v_2 = 0$ (2). En retranchant λ_1 fois (1) à (2), il reste $b(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = 0$ (2 pts).

Comme $\lambda_2 \neq \lambda_1$ et $v_2 \neq 0$, on obtient $b = 0$. Alors (1) donne $av_1 = 0$, donc $a = 0$ puisque $v_1 \neq 0$: la famille est libre (2 pts).

En dimension 2, une famille libre de deux vecteurs est une base : l'endomorphisme est diagonalisable (1 pt).

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Réduction des endomorphismes :
exercices de maths Licence L2



QCM de maths

Réduction des endomorphismes : QCM
de maths Licence L2



Contrôles de maths

Réduction des endomorphismes :
contrôle de maths Licence L2



Exercices de maths

Espaces préhilbertiens et euclidiens :
exercices de maths Licence L2



Exercices de maths

Suites et séries de fonctions : exercices
de maths Licence L2



QCM de maths

Espaces préhilbertiens et euclidiens :
QCM de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage