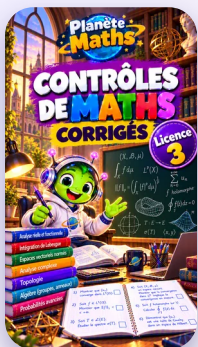


Réduction des endomorphismes : corrigé du contrôle de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 52 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigé du contrôle avec le barème détaillé. Compte tes points et repère ce qu'il faut revoir.

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice autorisée seulement quand l'énoncé le précise.

1 Diagonalisation et puissances

/ 4 pts

- a) Trace **3**, déterminant **2** : $\chi_K = X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$ (1 pt). Deux valeurs propres distinctes : K est diagonalisable (0,5 pt).
- b) $K - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$: vecteur $(2, 1)$. $K - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$: vecteur $(1, 1)$ (1 pt). Avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P^{-1}KP = \text{diag}(1, 2)$ (0,5 pt).
- c) $K^n = P \text{diag}(1, 2^n) P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & -2 + 2^{n+1} \\ 1 - 2^n & -1 + 2^{n+1} \end{pmatrix}$ (1 pt). Pour $n = 1$, on retrouve K .

2 Cayley-Hamilton

/ 4 pts

- a) La matrice L est compagnon de $X^3 - 2X^2 + X - 2$: on développe $\det(XI - L)$ selon la première ligne : $X(X^2 - 2X + 1) - 2$, d'où $\chi_L = X^3 - 2X^2 + X - 2 = (X - 2)(X^2 + 1)$ (1 pt). Dans $\mathbb{C}$: $(X - 2)(X - i)(X + i)$ (0,5 pt).
- b) Cayley-Hamilton : $L^3 - 2L^2 + L - 2I = 0$, donc $L(L^2 - 2L + I) = 2I$ et $L^{-1} = \frac{1}{2}(L^2 - 2L + I)$ (1 pt). Avec $L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, on obtient $L^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (1 pt).
- c) Sur $\mathbb{R}$, χ_L n'est pas scindé : L n'est pas diagonalisable (0,25 pt). Sur $\mathbb{C}$, trois racines distinctes : L est diagonalisable (0,25 pt).

3 Polynôme minimal et diagonalisabilité

/ 4 pts

a) Les deux sont triangulaires : $\chi_S = (X - 3)^2(X - 1)$ et $\chi_T = (X - 1)^2(X - 2)$ (1 pt).

b) Pour S : $S - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \neq 0$ et

$$(S - 3I)(S - I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \text{ alors que}$$

$(S - 3I)^2(S - I) = 0$; donc $\mu_S = (X - 3)^2(X - 1)$ (1 pt). Pour T :

$$(T - I)(T - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0, \text{ et ni } T - I \text{ ni } T - 2I \text{ n'est nul,}$$

donc $\mu_T = (X - 1)(X - 2)$ (1 pt).

c) μ_S a une racine double : S n'est pas diagonalisable (0,5 pt). μ_T est scindé à racines simples : T est diagonalisable (0,5 pt).

4 Décomposition de Dunford

/ 4 pts

a) $\chi_V = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$ (0,5 pt). Si V était diagonalisable, on aurait $V = 2I$, ce qui est faux (1 pt).

b) $D = 2I$ et $N = V - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = \begin{pmatrix} 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & -1+1 \end{pmatrix} = 0$ et $DN = ND$ (1 pt). C'est la décomposition de Dunford (0,5 pt).

c) $V^k = 2^k I + k 2^{k-1} N$ (0,5 pt). Pour $k = 4$: $V^4 = 16I + 32N = \begin{pmatrix} 48 & 32 \\ -32 & -16 \end{pmatrix}$ (0,5 pt).

5 Jordan**/ 4 pts**

a) La seule valeur propre est **3** et **$\dim E = 4$** , donc $\chi_W = (X - 3)^4$ (0,5 pt). Blocs de taille au moins **k** : **2**, **$3 - 2 = 1$** , **$4 - 3 = 1$** , soit un bloc de taille **3** et un de taille **1** (1,5 pt).

b) $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (0,5 pt), et $\mu_W = (X - 3)^3$ (0,5 pt).

c) μ_W a une racine triple : **W** n'est pas diagonalisable (0,5 pt). Dans une base de Jordan, **$D = 3I_4$** et **$N = J - 3I_4$** (nilpotent d'indice **3**, **$N^3 = 0$**) (0,5 pt).

Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 52 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#) **Zyro te conseille la suite** **Contrôles de maths**

Réduction des endomorphismes :
contrôle de maths Licence L3

 Cours de maths

Réduction des endomorphismes : cours
de maths Licence L3

 QCM de maths

Réduction des endomorphismes : QCM
de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Groupes, anneaux et corps : contrôle de
maths Licence L3

 Contrôles de maths

Topologie des espaces métriques :
contrôle de maths Licence L3

 Cours de maths

Groupes, anneaux et corps : cours de
maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage