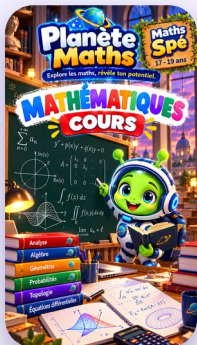


Réduction des endomorphismes : cours de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Diagonaliser, c'est trouver le point de vue depuis lequel un endomorphisme devient transparent : une simple multiplication par un scalaire sur chaque axe. Cette « réduction » permet de calculer des puissances, de résoudre des suites et des systèmes récurrents, et de comprendre en profondeur la structure d'une application linéaire. Quand elle n'est pas possible, on se rabat sur la trigonalisation, sur les polynômes annulateurs ou sur la décomposition en sous-espaces stables. Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et u un endomorphisme de E .

1. Valeurs propres et vecteurs propres

D Éléments propres

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de u s'il existe un vecteur $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. Un tel vecteur x est un **vecteur propre** associé à λ . L'ensemble des valeurs propres est le **spectre** de u , noté $\text{Sp}(u)$.

Un vecteur propre est donc un vecteur non nul dont la direction est conservée par u . Les trois énoncés suivants sont équivalents : λ est valeur propre de u ; l'endomorphisme $u - \lambda \text{id}$ n'est pas injectif ; $\det(u - \lambda \text{id}) = 0$. Pour une matrice carrée A , on parle de la même façon de valeurs et de vecteurs propres, en identifiant A à l'endomorphisme $X \mapsto AX$ de $\mathbb{K}^n$.

⚠ Piège

Le vecteur nul n'est **jamais** un vecteur propre, même s'il vérifie $u(0) = \lambda \cdot 0$ pour tout λ . En revanche, le scalaire 0 peut très bien être une valeur propre : c'est le cas exactement quand u n'est pas injectif, c'est-à-dire quand u n'est pas bijectif.

! Astuce de Zyro

Sur ma planète, on dit qu'un vecteur propre est un « axe têtù » : l'endomorphisme peut l'étirer, le comprimer ou le retourner, mais il ne le fait jamais tourner. Cherche d'abord les axes têtus, et le reste de la réduction en découle.

2. Sous-espaces propres

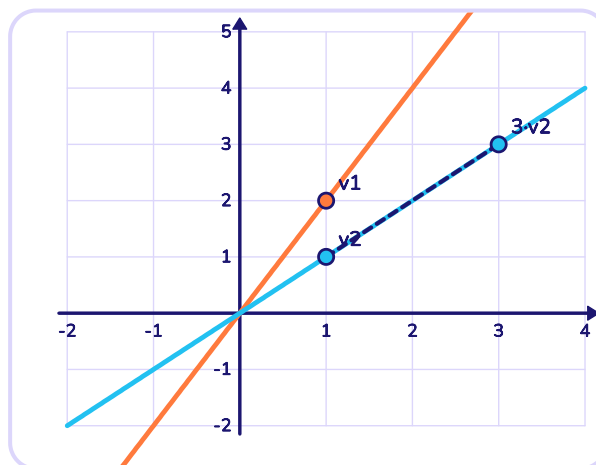
D Sous-espace propre

Pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$, le sous-espace propre est $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{id})$. Il contient le vecteur nul et tous les vecteurs propres associés à λ .

P Somme directe des sous-espaces propres

Des vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes forment une famille libre. Par conséquent, les sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe, et u possède au plus n valeurs propres.

Preuve de la liberté, par récurrence sur le nombre de vecteurs. Avec un seul vecteur propre (non nul), c'est clair. Supposons la propriété vraie pour $k - 1$ vecteurs et soit $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0$ avec $u(x_i) = \lambda_i x_i$. En appliquant u , puis en retranchant λ_k fois la relation initiale, on obtient $\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) x_i = 0$. L'hypothèse de récurrence et la distinction des valeurs propres donnent $\alpha_1 = \dots = \alpha_{k-1} = 0$, puis $\alpha_k x_k = 0$, donc $\alpha_k = 0$.



La figure illustre l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé à la matrice A de l'exemple 1 ci-dessous. Les deux droites propres sont les directions invariantes : un vecteur de la droite cyan est triplé, un vecteur de la droite orange est conservé.

3. Polynôme caractéristique

D Polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique de u est $\chi_u(X) = \det(X \text{id} - u)$. C'est un polynôme unitaire de degré n :

$$\chi_u(X) = X^n - \text{tr}(u) X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u).$$

P Propriétés

1) Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u dans $\mathbb{K}$. 2) Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. 3) Pour une matrice triangulaire, $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$. 4) Si λ est racine de multiplicité m_λ , alors $1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$.

E Exemple 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. On a $\text{tr}(A) = 4$ et $\det(A) = 3$, donc $\chi_A(X) = X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3)$. Le spectre est $\{1, 3\}$.

Pour $\lambda = 1$: $A - I = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, d'où $E_1 = \text{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1, 2)$. Pour $\lambda = 3$: $A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$, d'où $E_3 = \text{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = (1, 1)$. On vérifie $Av_1 = v_1$ et $Av_2 = 3v_2$.



Piège

Sur $\mathbb{R}$, un polynôme caractéristique peut ne pas avoir de racine. La matrice de rotation $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour polynôme caractéristique $X^2 + 1$: elle n'a aucune valeur propre réelle, alors qu'elle en a deux dans $\mathbb{C}$.

4. Diagonalisation



Endomorphisme diagonalisable

u est **diagonalisable** s'il existe une base de E formée de vecteurs propres. Sa matrice dans cette base est alors diagonale. Pour une matrice : A est diagonalisable si $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible.



Caractérisations

Les propriétés suivantes sont équivalentes : (i) u est diagonalisable ; (ii) $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_{\lambda}(u)$; (iii) $\sum_{\lambda} \dim E_{\lambda}(u) = n$; (iv) χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\dim E_{\lambda}(u) = m_{\lambda}$ pour toute valeur propre λ . En particulier, si χ_u est scindé à racines simples (n valeurs propres distinctes), u est diagonalisable.

M

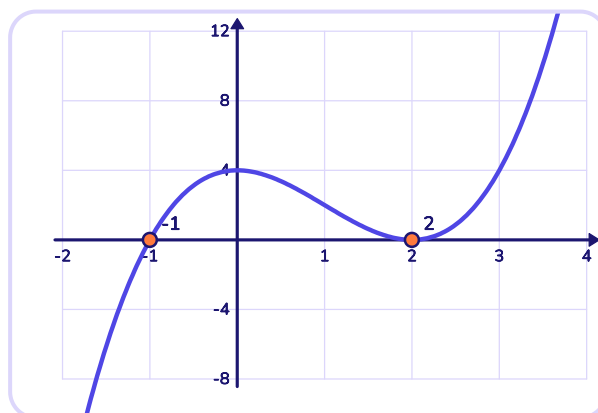
Méthode : diagonaliser une matrice

1. Calculer χ_A et le factoriser ; relever les valeurs propres et leurs multiplicités.
2. Pour chaque valeur propre λ , résoudre $(A - \lambda I)X = 0$ et donner une base de E_λ .
3. Comparer $\dim E_\lambda$ et m_λ : si l'égalité a lieu partout, A est diagonalisable.
4. Assembler les bases en colonnes dans P , et placer les valeurs propres dans le même ordre dans D .

E

Exemple 2

Soit $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. Alors $\chi_B(X) = (X - 2)^2(X + 1)$. Pour $\lambda = -1$, on trouve $E_{-1} = \text{Vect}((1, 1, 1))$. Pour $\lambda = 2$, le système se réduit à l'unique équation $x - y - z = 0$, donc $E_2 = \text{Vect}((1, 1, 0), (1, 0, 1))$, de dimension $2 = m_2$. La matrice B est diagonalisable : avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (colonnes $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$), on a $B = P \text{diag}(-1, 2, 2) P^{-1}$.



Cette figure montre le polynôme caractéristique de B : il coupe l'axe en -1 (racine simple) et le touche en 2 (racine double), ce qui se lit sur l'alternance des signes.



Piège

Un polynôme caractéristique scindé ne suffit pas à garantir la diagonalisabilité : il faut en plus l'égalité $\dim E_\lambda = m_\lambda$ pour chaque valeur propre multiple. La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ a pour $\chi = (X - 2)^2$ mais son sous-espace propre E_2 est une droite.

5. Trigonalisation



Endomorphisme trigonalisable

u est **trigonalisable** s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.



Théorème de trigonalisation

u est trigonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$. En particulier, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, et toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, est trigonalisable. Les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire sont les valeurs propres, répétées selon leur multiplicité ; leur somme est la trace, leur produit est le déterminant.

E

Exemple 3

Soit $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ici $\chi_C(X) = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$. Comme $C - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est non nulle, $E_2 = \text{Vect}(e_1)$ avec $e_1 = (1, -1)$: C n'est pas diagonalisable. Complétons par $e_2 = (1, 0)$: $Ce_2 = (3, -1) = e_1 + 2e_2$. Dans la base (e_1, e_2) , la matrice est $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, triangulaire supérieure, avec $C = PTP^{-1}$ pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

M

Méthode : trigonaliser

1. Choisir une valeur propre et un vecteur propre e_1 : il sera le premier vecteur de la base.
2. Compléter en une base $(e_1, e_2, \dots)$ et calculer la matrice : la première colonne est $(\lambda, 0, \dots, 0)$.
3. Recommencer sur le bloc restant, de taille $n - 1$.

6. Polynômes annulateurs

Pour $P = \sum a_k X^k$, on pose $P(u) = \sum a_k u^k$. Un polynôme P est **annulateur** de u si $P(u) = 0$. Comme $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie n^2 , il existe toujours un polynôme annulateur non nul.

P

Théorème de Cayley-Hamilton et polynôme minimal

Le polynôme caractéristique est annulateur : $\chi_u(u) = 0$. Il existe un unique polynôme annulateur unitaire de degré minimal, le **polynôme minimal** μ_u , et il divise tout polynôme annulateur. Si P est annulateur, toute valeur propre de u est racine de P ; μ_u et χ_u ont les mêmes racines.

P

Critère de diagonalisabilité

u est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, c'est-à-dire si μ_u est scindé à racines simples.

E

Exemple 4

Pour la matrice A de l'exemple 1, Cayley-Hamilton donne $A^2 - 4A + 3I = 0$. Pour calculer A^n , on cherche le reste de la division de X^n par $(X - 1)(X - 3)$, de la forme $aX + b$. En évaluant en 1 et en 3 : $a + b = 1$ et $3a + b = 3^n$, d'où $a = \frac{3^n - 1}{2}$ et $b = \frac{3 - 3^n}{2}$. Ainsi $A^n = \frac{3^n - 1}{2}A + \frac{3 - 3^n}{2}I$. Pour $n = 5$: $A^5 = 121A - 120I = \begin{pmatrix} 485 & -242 \\ 484 & -241 \end{pmatrix}$.

7. Lemme des noyaux

P

Lemme des noyaux

Soient $P_1, \dots, P_r$ des polynômes deux à deux premiers entre eux et $P = P_1 P_2 \cdots P_r$. Alors

$$\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u) \oplus \cdots \oplus \ker P_r(u).$$

En particulier, si $P(u) = 0$, alors $E = \bigoplus_i \ker P_i(u)$.

Idée de la preuve pour $r = 2$. Si $P_1 \wedge P_2 = 1$, la relation de Bézout fournit U, V avec $UP_1 + VP_2 = 1$. Pour $x \in \ker P(u)$, on écrit $x = (UP_1)(u)(x) + (VP_2)(u)(x)$: le premier terme est dans $\ker P_2(u)$, le second dans $\ker P_1(u)$. Un vecteur de l'intersection des deux noyaux est annulé par $UP_1 + VP_2 = 1$, donc il est nul.

E

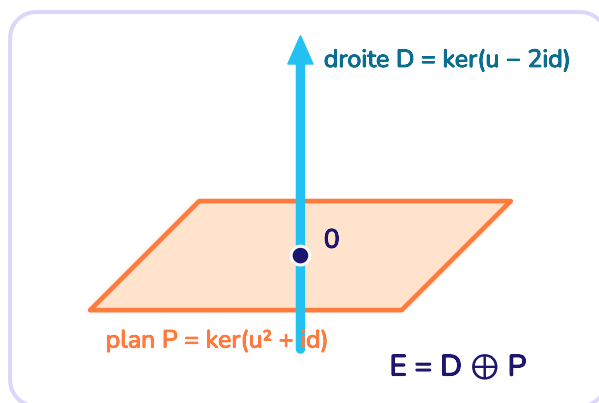
Exemple 5

Soit $N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le bloc $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour carré $-I_2$, donc

$P = (X - 2)(X^2 + 1)$ annule N . Les polynômes $X - 2$ et $X^2 + 1$ sont premiers entre eux, car $X^2 + 1 = (X - 2)(X + 2) + 5$. Donc

$\mathbb{R}^3 = \ker(N - 2I) \oplus \ker(N^2 + I)$: une droite dirigée par $(1, 0, 0)$ et le plan

$\{x = 0\}$. Les projecteurs associés sont $\pi_1 = \frac{N^2 + I}{5}$ et $\pi_2 = \frac{4I - N^2}{5}$, de somme I .



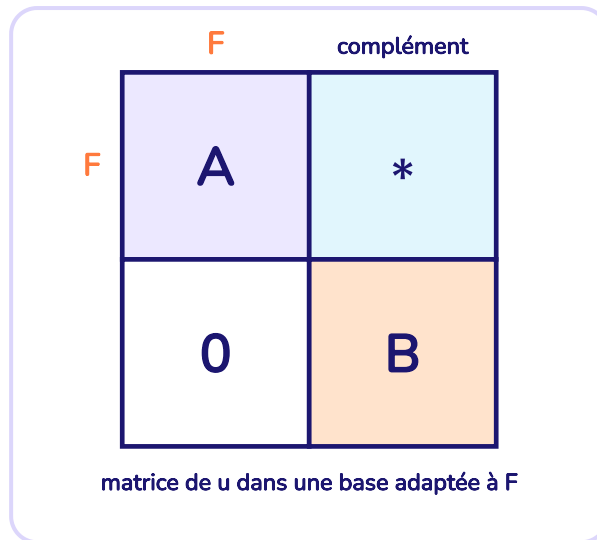
8. Sous-espaces stables

D Sous-espace stable

Un sous-espace F de E est **stable** par u si $u(F) \subset F$. L'endomorphisme induit $u_F : F \rightarrow F$ est la restriction de u à F .

P Propriétés

1) Une droite $\text{Vect}(x)$ est stable si et seulement si x est un vecteur propre. 2) Les sous-espaces propres, $\ker P(u)$ et $\text{Im } P(u)$ sont stables par u . 3) Si v commute avec u , alors tout noyau et toute image de polynôme en u sont stables par v . 4) Si F est stable de dimension p , la matrice de u dans une base adaptée à F est triangulaire supérieure par blocs, $\begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec A la matrice de u_F , et χ_{u_F} divise χ_u car $\chi_u = \chi_A \cdot \chi_B$. 5) La restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable est diagonalisable.



Chercher les sous-espaces stables d'un endomorphisme, c'est chercher comment le « découper » en morceaux indépendants plus petits : c'est la clef de toute la réduction.

À retenir

- λ est valeur propre de u si et seulement si $\ker(u - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$; c'est une racine de χ_u .
- Les sous-espaces propres sont en somme directe ; $1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$.
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et $\dim E_\lambda = m_\lambda$ pour tout λ ; n valeurs propres distinctes suffisent.
- u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé : toujours vrai sur $\mathbb{C}$.
- Cayley-Hamilton : $\chi_u(u) = 0$; diagonalisable si et seulement s'il existe un annulateur scindé à racines simples.
- Lemme des noyaux : polynômes premiers entre eux, noyaux en somme directe.
- Un sous-espace stable donne une matrice triangulaire par blocs ; commuter avec u rend les sous-espaces propres de u stables.

Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Réduction des endomorphismes :
exercices de maths Maths Spé

Contrôles de maths

Réduction des endomorphismes :
contrôle de maths Maths Spé

QCM de maths

Réduction des endomorphismes : QCM
de maths Maths Spé

Exercices de maths

Espaces euclidiens : exercices de maths
Maths Spé

 Exercices de maths

Séries numériques : exercices de maths
Maths Spé

 Contrôles de maths

Espaces euclidiens : contrôle de maths
Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage