

# Réduction des endomorphismes : exercices corrigés de maths Maths Spé à télécharger en PDF



## Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

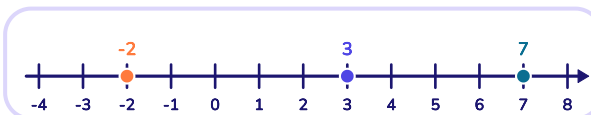
Voir le livre

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

### 1 Spectre d'une matrice triangulaire



- a.  $T$  est triangulaire, donc  $\chi_T(X) = (X - 3)(X + 2)(X - 7)$  et  $\text{Sp}(T) = \{-2, 3, 7\}$  (placés sur la droite graduée ci-dessous).



- b. Trois valeurs propres distinctes en dimension **3** :  $\chi_T$  est scindé à racines simples, donc  $T$  est diagonalisable.
- c.  $\text{tr}(T) = 3 - 2 + 7 = 8$  et  $\det(T) = 3 \times (-2) \times 7 = -42$ .

## 2 Vecteurs propres ou non ?



- a.  $Au_1 = (5, 5) = 5u_1$  : vecteur propre, valeur propre 5.  $Au_2 = (-2, 1) = -u_2$  : vecteur propre, valeur propre  $-1$ .  $Au_3 = (9, 8)$  n'est pas colinéaire à  $(1, 2)$  : ce n'est pas un vecteur propre.
- b.  $u_1$  et  $u_2$  ne sont pas colinéaires, donc forment une base de  $\mathbb{R}^2$ . Avec  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  et  $D = \text{diag}(5, -1)$ , on a  $A = PDP^{-1}$ . Vérification :  $\text{tr}(A) = 4 = 5 - 1$  et  $\det(A) = -5 = 5 \times (-1)$ .

## 3 Polynôme caractéristique d'ordre 2



$\text{tr}(M) = 8$  et  $\det(M) = 12 + 3 = 15$ , donc

$\chi_M(X) = X^2 - 8X + 15 = (X - 3)(X - 5)$ . Valeurs propres : 3 et 5.

$M - 3I = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} : x + 3y = 0$ , donc  $E_3 = \text{Vect}((3, -1))$ .  $M - 5I = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} : x + y = 0$ , donc  $E_5 = \text{Vect}((1, -1))$ . Contrôle :  $M(3, -1) = (9, -3) = 3(3, -1)$  et  $M(1, -1) = (5, -5) = 5(1, -1)$ .

## 4 Vrai ou faux ?



- a. Vrai : il existe  $x \neq 0$  avec  $Ax = 0$ , donc  $A$  n'est pas injective.
- b. Faux : par définition, un vecteur propre est non nul.
- c. Vrai : si  $Ax = \lambda x$  avec  $x \neq 0$ , alors  $A^2x = \lambda^2x$ .
- d. Faux :  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  a pour polynôme caractéristique  $X^2 + 1$ , sans racine réelle.
- e. Faux en général : pour  $D = \text{diag}(1, 2)$ ,  $e_1 + e_2 = (1, 1)$  a pour image  $(1, 2)$ , non colinéaire. C'est vrai seulement si les deux vecteurs ont la même valeur propre.

## 5 Une projection



a.  $P^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = P.$

b. Si  $Px = \lambda x$  avec  $x \neq 0$ , alors  $Px = P^2x = \lambda^2x$ , donc  $\lambda x = \lambda^2x$  et  $\lambda(\lambda - 1) = 0$ .

c.  $E_0 = \ker P : 2x - 2y = 0$ , donc  $E_0 = \text{Vect}((1, 1))$ .  $E_1 = \ker(P - I) : x - 2y = 0$ , donc  $E_1 = \text{Vect}((2, 1))$ . Les vecteurs  $(1, 1)$  et  $(2, 1)$  forment une base (déterminant  $-1$ ), donc  $P$  est diagonalisable, semblable à  $\text{diag}(0, 1)$ .

## 6 Une symétrie et ses puissances



a.  $S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$

b.  $X^2 - 1$  annule  $S$ , donc  $\text{Sp}(S) \subset \{-1, 1\}$ .  $E_1 = \ker(S - I) : 2x - 4y = 0$ , donc  $E_1 = \text{Vect}((2, 1))$ .  $E_{-1} = \ker(S + I) : 4x - 4y = 0$ , donc  $E_{-1} = \text{Vect}((1, 1))$ .

c. Comme  $S^2 = I$ ,  $S^{2025} = S^{2 \times 1012} \cdot S = S$  et  $S^{2026} = (S^2)^{1013} = I$ .

## 7 Une matrice de rang 1



a. Toutes les lignes sont égales :  $\text{rg}(J) = 1$ , donc  $\dim \ker J = 3 - 1 = 2$  par le théorème du rang. Ainsi  $0$  est valeur propre avec  $\dim E_0 = 2$ .

b.  $J(1, 1, 1) = (3, 3, 3) : 3$  est valeur propre. La trace vaut  $3 = 0 + 0 + 3$ , donc  $\chi_J(X) = X^2(X - 3)$  (racine  $0$  de multiplicité au moins  $2$  et racine  $3$ ).

c.  $\dim E_0 = 2 = m_0$  et  $\dim E_3 = 1 = m_3 : J$  est diagonalisable. Base propre :  $(1, -1, 0)$ ,  $(0, 1, -1)$  pour  $E_0$  et  $(1, 1, 1)$  pour  $E_3$ .

## 8

## Diagonaliser avec une valeur propre double



En développant selon la deuxième ligne :

$$\chi_A(X) = (X-3)[(X-3)(X+2)-0] = (X-3)^2(X+2).$$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} : \text{l'équation } y = z \text{ donne } E_3 = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 1)), \text{ de}$$

$$\text{dimension } 2 = m_3. A + 2I = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} : y = 0 \text{ et } x = z, \text{ donc}$$

$$E_{-2} = \text{Vect}((1, 0, 1)).$$

$$\text{La somme des dimensions vaut } 3 : A \text{ est diagonalisable. Avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ on}$$

$$\text{obtient } P^{-1}AP = \text{diag}(3, 3, -2).$$

## 9

## Une matrice non diagonalisable



$$\text{La valeur propre } 1 \text{ est double. } M - I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} : \text{la ligne 3 égale la ligne 1, et la}$$

ligne 2 n'est pas proportionnelle à la ligne 1, donc  $\text{rg}(M - I) = 2$  et

$$\dim E_1 = 3 - 2 = 1 < 2 = m_1. \text{ Ainsi } M \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

Résolution : de  $-x + 2y + z = 0$  et  $-2x + 2y + 2z = 0$ , on tire en retranchant la seconde équation au double de la première :  $2y = 0$ , donc  $y = 0$ , puis  $z = x$  :  $E_1 = \text{Vect}((1, 0, 1))$ .

Enfin  $E_3 = \text{Vect}((1, 1, 1))$  car  $M(1, 1, 1) = (3, 3, 3)$ . Seulement  $1 + 1 = 2$  vecteurs propres indépendants : pas de base de vecteurs propres.

## 10 Deux populations de bactéries



a.  $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $\chi_B(X) = X^2 - 7X + 10 = (X - 2)(X - 5)$ .  $E_2 = \text{Vect}((1, -1))$  et  $E_5 = \text{Vect}((2, 1))$ , donc  $B$  est diagonalisable.

b. On décompose  $X_0 = (3, 0) = 1 \cdot (1, -1) + 1 \cdot (2, 1)$ . Donc

$$X_n = B^n X_0 = 2^n(1, -1) + 5^n(2, 1), \text{ soit } a_n = 2^n + 2 \cdot 5^n \text{ et } b_n = 5^n - 2^n.$$

Contrôle :  $a_1 = 12 = 4 \times 3$  et  $b_1 = 3$ .

c.  $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2 \cdot 5^n + 2^n}{5^n - 2^n} \rightarrow 2$  : la colonie  $A$  devient deux fois plus nombreuse que  $B$ .

## 11 Un paramètre qui change tout



$M(a)$  est triangulaire supérieure :  $\chi(X) = (X - 1)^2(X - 2)$ . La valeur propre  $2$  est simple. Il reste à comparer  $\dim E_1$  et  $2$ .

$$M(a) - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{ Si } a \neq 0, \text{ les deux premières lignes non nulles sont}$$

indépendantes : rang  $2$  et  $\dim E_1 = 1 < 2$ , non diagonalisable. Si  $a = 0$ , le rang vaut  $1$  et  $\dim E_1 = 2$ , diagonalisable (la matrice est même diagonale). Conclusion :  $M(a)$  est diagonalisable si et seulement si  $a = 0$ .

## 12 Droites stables



a. Les droites stables sont les droites dirigées par un vecteur propre.

$$\chi_B(X) = X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2). E_1 = \text{Vect}((1, 1)) \text{ car}$$

$B(1, 1) = (1, 1)$  ;  $E_2 = \text{Vect}((2, 1))$  car  $B(2, 1) = (4, 2)$ . Ce sont les deux seules droites stables. Par exemple  $\text{Vect}((1, 0))$  ne l'est pas :  $B(1, 0) = (3, 1)$ .

b.  $(3, 2) = (1, 1) + (2, 1)$ . Donc  $B^n(3, 2) = (1, 1) + 2^n(2, 1) = (1 + 2^{n+1}, 1 + 2^n)$ .

### 13 Trace, déterminant et valeurs propres



- a. Notons  $\mu$  la troisième racine de  $\chi_A$  (comptée avec multiplicité). La somme  $2 + 3 + \mu = 9$  donne  $\mu = 4$  ; on vérifie  $2 \times 3 \times 4 = 24 = \det(A)$ . Les trois valeurs propres  $2, 3, 4$  sont distinctes :  $A$  est diagonalisable.
- b.  $\chi_A(X) = (X - 2)(X - 3)(X - 4) = X^3 - 9X^2 + 26X - 24$ . Les valeurs propres de  $A^2$  sont  $4, 9, 16$ , donc  $\text{tr}(A^2) = 29$ . Celles de  $A + I$  sont  $3, 4, 5$ , donc  $\det(A + I) = 60$ .

### 14 Un polynôme annulateur



- a. Le polynôme  $X^3 - 3X^2 + 2X = X(X - 1)(X - 2)$  annule  $A$ , donc  $\text{Sp}(A) \subset \{0, 1, 2\}$ .
- b. Ce polynôme est scindé à racines simples et annule  $A$  :  $A$  est diagonalisable.
- c. On a  $A(A^2 - 3A + 2I) = 0$  et  $A$  est inversible : en multipliant par  $A^{-1}$ ,  $A^2 - 3A + 2I = 0$ . Alors  $A(3I - A) = 2I$ , donc  $A^{-1} = \frac{3I - A}{2}$ .

### 15 Inverse par Cayley-Hamilton



- a.  $1$  est racine :  $1 - 8 + 17 - 10 = 0$ . On factorise :  $\chi_A(X) = (X - 1)(X^2 - 7X + 10) = (X - 1)(X - 2)(X - 5)$ . Trois valeurs propres distinctes en dimension  $3$  :  $A$  est diagonalisable.
- b. Par Cayley-Hamilton,  $A^3 - 8A^2 + 17A - 10I = 0$ , donc  $A(A^2 - 8A + 17I) = 10I$  et  $A^{-1} = \frac{1}{10}(A^2 - 8A + 17I)$ . Avec  $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -24 & 24 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & -24 & 28 \end{pmatrix}$ , on obtient  $A^2 - 8A + 17I = \begin{pmatrix} 10 & 8 & -8 \\ 5 & 10 & -5 \\ 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ , d'où  $A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 10 & 8 & -8 \\ 5 & 10 & -5 \\ 5 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ . (On a  $\det A = 10 \neq 0$ .)

## 16 Noyaux et dimension paire



- a.  $X^3 - X^2 + X - 1 = X^2(X - 1) + (X - 1) = (X - 1)(X^2 + 1)$ . Les polynômes  $X - 1$  et  $X^2 + 1$  sont premiers entre eux :  $X^2 + 1 = (X - 1)(X + 1) + 2$ , donc  $1 = \frac{1}{2}[(X^2 + 1) - (X - 1)(X + 1)]$ . Comme  $P(u) = 0$ , le lemme des noyaux donne  $E = \ker(u - \text{id}) \oplus \ker(u^2 + \text{id})$ .
- b. Posons  $F = \ker(u^2 + \text{id})$ , de dimension  $p$ , stable par  $u$ , et  $v = u_F$ . On a  $v^2 = -\text{id}_F$ , donc  $\det(v)^2 = \det(-\text{id}_F) = (-1)^p$ . Or  $\det(v)^2 \geq 0$  : on doit avoir  $(-1)^p = 1$ , donc  $p$  est paire.

## 17 Le commutant d'un endomorphisme



- a. Si  $x \in E_{\lambda_i}$ , alors  $A(Bx) = B(Ax) = \lambda_i Bx$ , donc  $Bx \in E_{\lambda_i}$ .
- b. Chaque  $E_{\lambda_i}$  est une droite (trois valeurs propres distinctes en dimension 3), dirigée par  $e_i$ . Stable par  $B$ , elle vérifie  $Be_i = \mu_i e_i$ . Dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ ,  $B$  est diagonale.
- c. Par interpolation de Lagrange, il existe  $Q \in \mathbb{R}_2[X]$  avec  $Q(\lambda_i) = \mu_i$ . Alors  $Q(A)e_i = \mu_i e_i = Be_i$  pour tout  $i$ , donc  $B = Q(A)$ . Réciproquement tout  $Q(A)$  commute avec  $A$ . Comme  $\mu_A$  est de degré 3, la famille  $(I, A, A^2)$  est libre : le commutant de  $A$  est de dimension 3.

## 18 Nilpotence et puissances

★★★★

a.  $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $N^3 = 0$ . Si  $Nx = \lambda x$ , alors  $0 = N^3x = \lambda^3x$ , donc  $\lambda = 0$  :

$\text{Sp}(N) = \{0\}$ , et  $\chi_N = X^3$ .

b. Si  $N$  était diagonalisable, semblable à une diagonale de valeurs propres nulles, elle serait nulle : or  $N \neq 0$ . Elle n'est donc pas diagonalisable. Elle est trigonalisable (elle est déjà triangulaire,  $\chi_N$  scindé).

c.  $I$  et  $N$  commutent :  $(I + N)^{10} = I + 10N + 45N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 55 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (le terme  $N^3$

et les suivants sont nuls). L'inverse est

$$(I + N)^{-1} = I - N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ car}$$

$$(I + N)(I - N + N^2) = I + N^3 = I.$$

## 19 Trigonalisation explicite

★★★★

a.  $M - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  est de rang 2 (deux lignes indépendantes), donc

$\dim E_1 = 1 < 2$  :  $M$  n'est pas diagonalisable.

b. Le noyau de  $M - I$  est  $\text{Vect}(v_1)$  avec  $v_1 = (1, 1, 1)$ . On cherche  $v_2$  tel que  $(M - I)v_2 = v_1$ , c'est-à-dire  $-x + y = 1$  et  $-x - y + 2z = 1$  : on prend  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $z = 1$ , soit  $v_2 = (0, 1, 1)$ . Enfin  $M(0, 0, 1) = (0, 0, 3)$ , donc  $v_3 = (0, 0, 1)$  est propre pour 3. Ainsi  $Mv_1 = v_1$ ,  $Mv_2 = v_1 + v_2$ ,  $Mv_3 = 3v_3$  : la matrice de  $M$  dans

$(v_1, v_2, v_3)$  est  $T$ . La famille est libre (déterminant 1), avec  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

## 20 Une suite récurrente à racine double

★★★

- a.  $\chi_C(X) = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2$ .  $C - 2I \neq 0$ , donc  $E_2$  est une droite :  $C$  n'est pas diagonalisable.
- b.  $N = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$  et  $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Comme  $2I$  et  $N$  commutent,  
 $C^n = (2I + N)^n = 2^n I + n2^{n-1}N$ .
- c.  $\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = C^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ . La première ligne de  $C^n$  est  $(2^n - 2n2^{n-1}, n2^{n-1})$ , donc  
 $u_n = 2^n - n2^n + 3n2^{n-1} = 2^n + n2^{n-1} = (n+2)2^{n-1}$ . Contrôle :  
 $u_2 = 8 = 4 \times 3 - 4 \times 1$  et  $u_3 = 20 = 4 \times 8 - 4 \times 3$ .

## 21 Matrice par blocs et sous-espace stable

★★★

- a.  $u(e_1) = e_1$  et  $u(e_2) = 2e_1 + 3e_2$  sont dans  $F$  :  $F$  est stable, et la matrice de  $u_F$  est  
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .
- b.  $M$  est triangulaire supérieure par blocs avec  $A$  et  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ . Donc  
 $\chi_M = \chi_A \chi_C$ .  $\chi_A = (X - 1)(X - 3)$  et  $\chi_C = X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$ .  
Ainsi  $\chi_M = (X - 1)^2(X - 2)(X - 3)$  et  $\text{Sp}(M) = \{1, 2, 3\}$ .
- c. Soit  $(x, y, z, w) \in E_1$  :  $(M - I)X = 0$  donne  $2y + 5z + w = 0$ ,  $2y + 2w = 0$ ,  
 $-z + w = 0$ ,  $-2z + 2w = 0$ . Alors  $z = w$ ,  $y = -w$ , puis  $-2w + 5w + w = 4w = 0$   
:  $w = z = y = 0$ . Donc  $E_1 = \text{Vect}(e_1)$ , de dimension  $1 < 2 = m_1$  :  $M$  n'est pas diagonalisable.

### Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 **Zyro te conseille la suite**

 **Exercices de maths**

Réduction des endomorphismes :  
exercices de maths Maths Spé

 **QCM de maths**

Réduction des endomorphismes : QCM  
de maths Maths Spé

 **Contrôles de maths**

Réduction des endomorphismes :  
contrôle de maths Maths Spé

 **Exercices de maths**

Espaces euclidiens : exercices de maths  
Maths Spé

 **Exercices de maths**

 **QCM de maths**

Séries numériques : exercices de maths  
Maths Spé

Espaces euclidiens : QCM de maths  
Maths Spé

## Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage