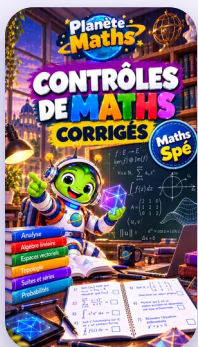


# Réduction des endomorphismes : corrigé du contrôle de maths Maths Spé à télécharger en PDF



## Le livre de contrôles corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 50 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigé du contrôle avec le barème détaillé. Compte tes points et repère ce qu'il faut revoir.

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice autorisée seulement quand l'énoncé le précise.

## 1 Diagonalisation d'une matrice de $\mathcal{M}_3$

/ 5 pts

- a.  $\text{tr}(A) = 4$ . Les lignes 1 et 2 sont égales :  $\det(A) = 0$ . Les mineurs principaux d'ordre 2 valent  $0, 0$  et  $9 - 6 = 3$ , de somme  $3$ . Donc

$$\chi_A(X) = X^3 - 4X^2 + 3X = X(X-1)(X-3) \text{ (2 pts).}$$

- b.  $E_0 : -2x + 3y + 2z = 0$  et  $-3x + 3y + 3z = 0$  donnent  $x = z$  et  $y = 0$  :

$$E_0 = \text{Vect}((1, 0, 1)). E_1 : x = y \text{ et } z = 0 : E_1 = \text{Vect}((1, 1, 0)). E_3 : x = y = z :$$

$$E_3 = \text{Vect}((1, 1, 1)) \text{ (2 pts).}$$

- c. Trois valeurs propres distinctes :  $A$  est diagonalisable avec  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et

$$D = \text{diag}(0, 1, 3) \text{ (1 pt).}$$

## 2 Une matrice non diagonalisable

/ 4 pts

- a.  $\text{tr}(B) = 6$ ,  $\det(B) = 5 + 4 = 9$ , donc  $\chi_B = X^2 - 6X + 9 = (X-3)^2$ .

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} : x + 2y = 0, \text{ donc } E_3 = \text{Vect}((2, -1)) \text{ (1 pt).}$$

- b.  $\dim E_3 = 1 < 2 = m_3 : B$  n'est pas diagonalisable (1 pt).

- c. Avec  $e_1 = (2, -1)$  et  $e_2 = (1, 0) : Be_2 = (5, -1) = e_1 + 3e_2$ . La matrice est

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ (1 pt).}$$

- d.  $N = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  et  $N^2 = 0$ . Donc  $B^n = (3I + N)^n = 3^n I + n3^{n-1}N$  (1 pt).

### 3 Un endomorphisme tel que $A^3 = A$

/ 4 pts

- a.  $X^3 - X = X(X - 1)(X + 1)$  annule  $A : \text{Sp}(A) \subset \{-1, 0, 1\}$  (1 pt).
- b. Annulateur scindé à racines simples :  $A$  est diagonalisable (1 pt).
- c.  $A^3 = A$  entraîne  $A^{2k+1} = A$  pour tout  $k \geq 0$  et  $A^{2k} = A^2$  pour tout  $k \geq 1$  (1 pt).
- d.  $A^2 = I_3$  (le bloc  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  est de carré  $I_2$ ), donc  $A^3 = A$ .

$\chi_A(X) = (X - 1)(X^2 - 1) = (X - 1)^2(X + 1)$ .  $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  est de rang 1, donc  $\dim E_1 = 2 = m_1$  (1 pt).

### 4 Questions de cours

/ 3 pts

- a. Vrai :  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{C}$  (théorème de d'Alembert-Gauss), donc  $A$  est trigonalisable (1 pt).
- b. Vrai :  $X^2$  annule  $A$ , donc 0 est la seule valeur propre ; une matrice diagonalisable de spectre  $\{0\}$  est nulle, ce qui est exclu (1 pt).
- c. Faux : 0 et  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ont toutes deux pour polynôme caractéristique  $X^2$ , mais la matrice nulle n'est semblable qu'à elle-même (1 pt).

## 5 Lemme des noyaux

/ 4 pts

a.  $N^2 = \text{diag}(1, -4, -4)$  par blocs, donc  $N^2 + 4I = \text{diag}(5, 0, 0)$ . Or

$$N - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ a sa première colonne nulle, donc}$$

$$(N - I)(N^2 + 4I) = 0 \text{ (1 pt).}$$

b.  $X^2 + 4 = (X - 1)(X + 1) + 5$ , d'où  $1 = \frac{1}{5} [(X^2 + 4) - (X - 1)(X + 1)]$  : les deux polynômes sont premiers entre eux (1 pt).

c. Par le lemme des noyaux,  $\mathbb{R}^3 = \ker(N - I) \oplus \ker(N^2 + 4I)$  : la droite  $\text{Vect}((1, 0, 0))$  et le plan  $\{x = 0\}$  (1 pt).

d. Non : sur le plan  $\{x = 0\}$ ,  $N$  agit comme une matrice de carré  $-4I_2$ , sans valeur propre réelle ; le polynôme minimal  $(X - 1)(X^2 + 4)$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$  (1 pt).

### Le livre de contrôles corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 50 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite



### Contrôles de maths

Réduction des endomorphismes :  
contrôle de maths Maths Spé



### Cours de maths

Réduction des endomorphismes : cours  
de maths Maths Spé



### QCM de maths

Réduction des endomorphismes : QCM  
de maths Maths Spé



### Contrôles de maths

Espaces euclidiens : contrôle de maths  
Maths Spé



### Contrôles de maths

Séries numériques : contrôle de maths  
Maths Spé



### Cours de maths

Espaces euclidiens : cours de maths  
Maths Spé

**Zyro vous emmène sur nos sites partenaires**

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage