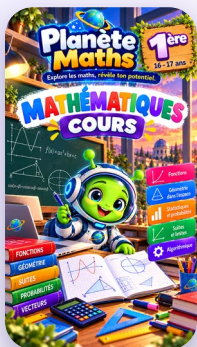


Produit scalaire : cours de maths 1ère à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths 1ère

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Quand tu pousses un chariot, ce n'est pas toute ta force qui le fait avancer, mais seulement la part qui va dans le sens du mouvement. Le **produit scalaire** mesure exactement cela : il transforme deux vecteurs en un nombre qui dit s'ils vont dans le même sens, dans des sens opposés ou à angle droit. C'est l'outil de la géométrie de Première pour calculer des **angles**, des **longueurs** et démontrer des **perpendicularités**.

1. Définitions du produit scalaire

D

Norme d'un vecteur

La **norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$, est la longueur AB . Un vecteur de norme 1 est dit unitaire.

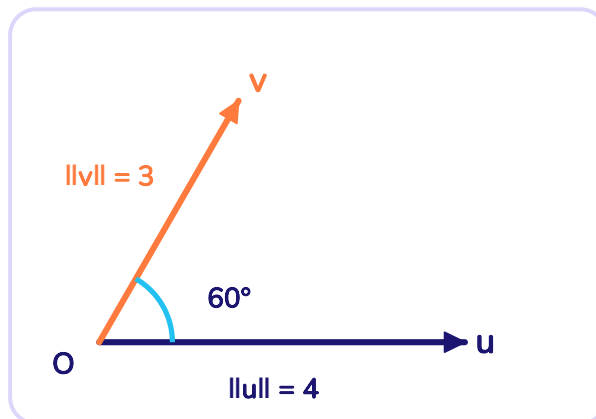
D

Produit scalaire

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Leur produit scalaire est le **nombre**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$$

où $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ lorsqu'on les trace avec la même origine. Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire vaut **0**.



Sur la figure, $\|\vec{u}\| = 4$, $\|\vec{v}\| = 3$ et l'angle vaut 60° . Donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \times 3 \times \cos 60^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6$.

Le signe du résultat suit celui du cosinus : positif si l'angle est aigu, nul s'il est droit, négatif s'il est obtus. Deux cas particuliers sont à connaître : si les vecteurs ont la même direction et le même sens, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$; s'ils sont de sens contraires, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

P

Carré scalaire et formule de polarisation

$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, que l'on note aussi $\vec{u}^2$. De plus, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

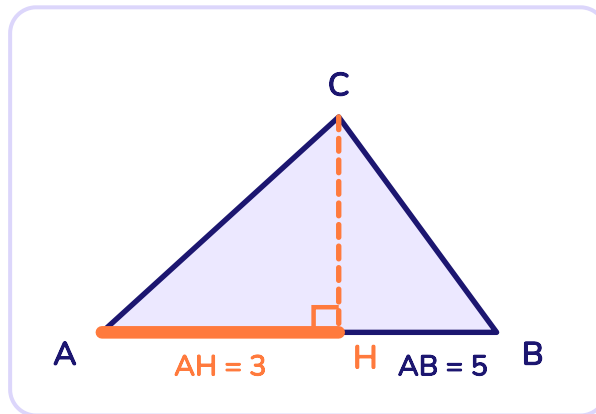
E

Exemple 1

On sait que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 5$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 7$. Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(49 - 9 - 25) = \frac{15}{2}$.
 . On en déduit $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{15/2}{15} = \frac{1}{2}$, donc l'angle vaut 60° .

2. Projeté orthogonal

Soit A, B, C trois points avec $A \neq B$. On note H le **projeté orthogonal** de C sur la droite (AB) : c'est le pied de la perpendiculaire à (AB) passant par C .



P

Calcul avec le projeté orthogonal

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$. Ce produit vaut $+AB \times AH$ si H est du même côté de A que B , et $-AB \times AH$ sinon.

Pourquoi ? Dans le triangle AHC rectangle en H , on a $AH = AC \cos \hat{A}$ quand l'angle en A est aigu, et c'est exactement ce qui apparaît dans la définition.

E**Exemple 2**

Sur la figure, $AB = 5$ et $AH = 3$, avec H sur la demi-droite $[AB)$. Donc

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 3 = 15$. Si H avait été de l'autre côté de A , on aurait trouvé -15 .

!**Astuce de Zyro**

Imagine que le soleil est exactement au-dessus : l'ombre de C sur la droite (AB) est le point H . Pour un produit scalaire, remplace toujours le deuxième vecteur par son ombre, c'est plus simple !

3. Expression analytique

Dans un repère orthonormé, la définition géométrique laisse place à un calcul sans angle.

P**Expression analytique**

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \quad \text{et} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

E**Exemple 3**

Pour $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 + (-2) \times 5 = 12 - 10 = 2$. Et
 $\|\vec{u}\| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

4. Bilinéarité et symétrie

P

Propriétés

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel k :

- symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- bilinéarité : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Ces règles permettent de développer comme avec des nombres. On obtient les identités remarquables :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

⚠

Piège

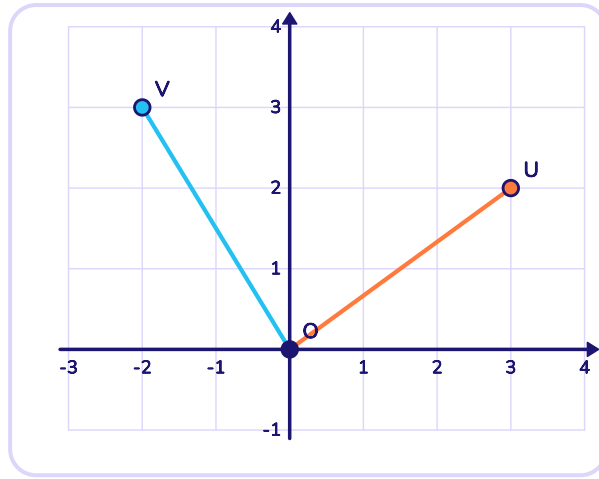
Le produit scalaire de deux vecteurs est un **nombre**, pas un vecteur. Écrire $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$ n'a aucun sens, et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathbf{0}$ n'implique pas que l'un des vecteurs soit nul.

5. Orthogonalité

P

Critère d'orthogonalité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathbf{0}$. En particulier, les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.



Sur la figure, $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vérifient $3 \times (-2) + 2 \times 3 = 0$: ils sont orthogonaux, et on le voit bien sur le repère.

M

Méthode : démontrer qu'un triangle est rectangle

1. Calcule les coordonnées de deux vecteurs partant du même sommet.
2. Calcule leur produit scalaire.
3. S'il vaut **0**, le triangle est rectangle en ce sommet ; sinon, essaie un autre sommet.

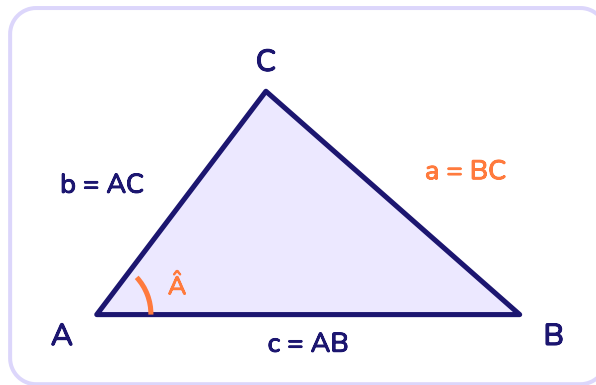
6. Formule d'Al-Kashi

P

Formule d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC , avec $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}.$$



Démonstration. Comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, on a

$$BC^2 = \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2 = AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + AB^2, \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{A}.$$

Quand l'angle $\hat{A}$ est droit, le cosinus est nul et on retrouve le théorème de Pythagore : Al-Kashi en est une généralisation.

E Exemple 4

Dans ABC , $AB = 5$, $AC = 8$ et $\hat{A} = 60^\circ$. Alors

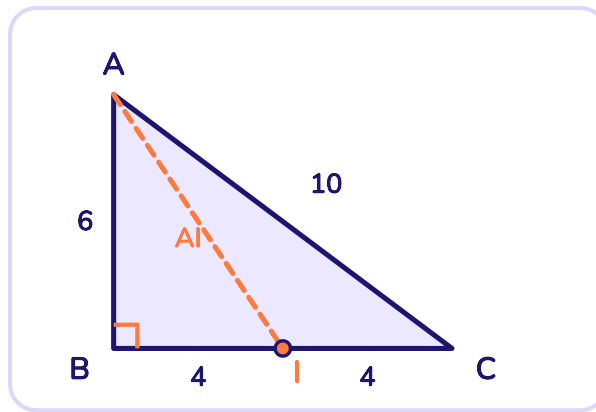
$$BC^2 = 25 + 64 - 2 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2} = 49, \text{ donc } BC = 7.$$

7. Théorème de la médiane

P Théorème de la médiane

Soit A, B, C trois points et I le milieu de $[BC]$. Alors

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}, \quad \text{soit} \quad AI^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}.$$



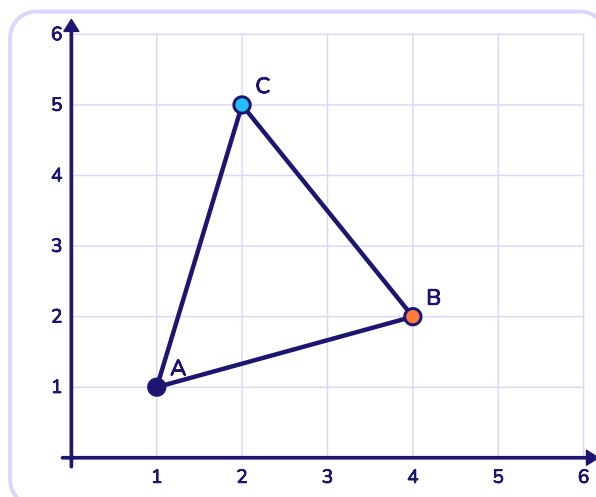
Démonstration. On écrit $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}$. En élevant au carré et en additionnant, les doubles produits s'annulent : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2IB^2$, et $IB = \frac{BC}{2}$.

E Exemple 5

Avec $AB = 6$, $AC = 10$ et $BC = 8$: $AI^2 = \frac{36 + 100}{2} - \frac{64}{4} = 68 - 16 = 52$,
donc $AI = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \approx 7,21$.

8. Calculs d'angles et de longueurs

Le produit scalaire sert à passer d'une information à l'autre. La formule $\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$ donne l'angle dès que l'on sait calculer le produit scalaire autrement, par exemple avec des coordonnées.



E**Exemple 6**

Avec $A(1; 1)$, $B(4; 2)$, $C(2; 5)$: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 + 4 = 7$.

Or $AB = \sqrt{10}$ et $AC = \sqrt{17}$.

Ainsi $\cos \hat{A} = \frac{7}{\sqrt{170}} \approx 0,537$, puis $\hat{A} \approx 57,5^\circ$ à la calculatrice (mode degrés).

Pour une **longueur**, on utilise Al-Kashi si l'on connaît deux côtés et l'angle compris, la médiane si l'on cherche une médiane, ou encore l'égalité $AB^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$.

M**Méthode : choisir la bonne formule**

1. Repère ce que l'on connaît : angle, longueurs, coordonnées.
2. Si les coordonnées sont données, utilise $xx' + yy'$.
3. Si l'on connaît deux côtés et leur angle, utilise la définition ou Al-Kashi.
4. Pour un angle, isole le cosinus et utilise la touche $\cos^{-1}$.

À retenir

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$: le résultat est un **nombre**.
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.
- Avec le projeté orthogonal : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$.
- En repère orthonormé : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
- Symétrie et bilinéarité permettent de développer comme avec des réels.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$; médiane : $AI^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$.

Le livre de cours de maths 1ère

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Produit scalaire : exercices de maths 1ère

Produit scalaire : contrôle de maths 1ère

 **QCM de maths**

Produit scalaire : QCM de maths 1ère

 **Exercices de maths**

Géométrie repérée : exercices de maths 1ère

 **Exercices de maths**

Probabilités conditionnelles : exercices de maths 1ère

 **Contrôles de maths**

Géométrie repérée : contrôle de maths 1ère

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage