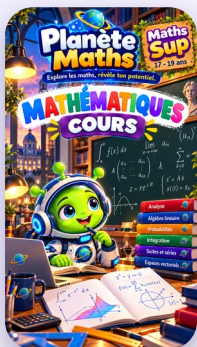


Dénombrement et probabilités : cours de maths

Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Compter les issues d'une expérience, puis mesurer leurs chances : ces deux gestes sont indissociables. Ce chapitre construit les outils de dénombrement (cardinaux, arrangements, combinaisons), puis les utilise pour définir des probabilités sur un univers fini, conditionner, inverser un conditionnement (formule de Bayes), traduire l'indépendance et résumer une variable aléatoire par son espérance et sa variance.

1. Cardinaux et principes de dénombrement

D Cardinal

Un ensemble fini E possède n éléments si ses éléments peuvent être mis en bijection avec $\{1, \dots, n\}$. On note $|E| = \text{Card}(E) = n$. Par convention $|\emptyset| = 0$.



Règles de base

Pour des ensembles finis A, B :

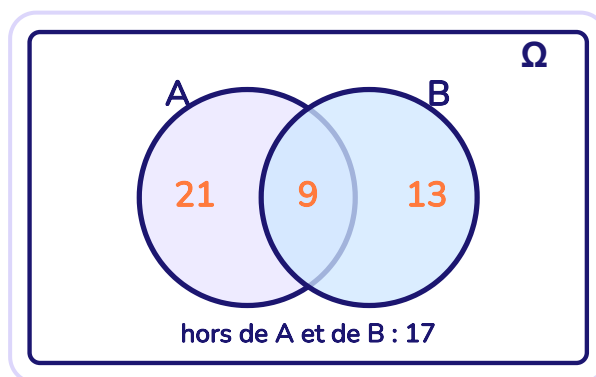
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ (principe d'inclusion-exclusion à deux ensembles) ;
- plus généralement, formule du crible :
$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots$$
- si $A \subset E$, alors $|\overline{A}| = |E| - |A|$;
- $|A \times B| = |A| |B|$ (produit cartésien) ;
- $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$: un ensemble à n éléments possède 2^n parties.

Le **principe additif** dit que si une expérience se partage en cas disjoints, on additionne les nombres de façons. Le **principe multiplicatif** dit que si l'on réalise successivement k choix possédant $n_1, n_2, \dots, n_k$ options (indépendamment du détail des choix précédents), on obtient $n_1 n_2 \cdots n_k$ résultats. Un choix ordonné avec répétitions possibles de p éléments parmi n (une p -liste) se fait de n^p façons.



Exemple 1 Un code d'accès comporte trois lettres de l'alphabet (26 lettres), puis deux chiffres. Les choix sont successifs et indépendants :

$26^3 \times 10^2 = 17\,576 \times 100 = 1\,757\,600$ codes. Un tel code ne comportant que des voyelles (6 lettres) donne $6^3 \times 10^2 = 21\,600$ codes.



La figure ci-dessus illustre l'inclusion-exclusion : avec $|A| = 30$, $|B| = 22$ et $|A \cap B| = 9$, on obtient $|A \cup B| = 30 + 22 - 9 = 43$, et 17 éléments de l'univers de 60 issues restent hors de $A \cup B$.

2. Arrangements et permutations

D Arrangement

Un arrangement de p éléments parmi n est une liste ordonnée de p éléments *deux à deux distincts* de l'ensemble. Leur nombre est

$$A_n^p = n(n-1) \cdots (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \quad (0 \leq p \leq n).$$

Pour $p = n$, on parle de *permutation* : il y a $n!$ façons d'ordonner n objets.

E Exemple 2 Neuf athlètes disputent une finale ; le podium (ordre or, argent, bronze) se choisit de $A_9^3 = 9 \times 8 \times 7 = 504$ façons. Les anagrammes du mot « RADAR » (lettres R et A répétées deux fois) sont au nombre de $\frac{5!}{2!2!} = 30$: on divise par le nombre d'ordres des lettres identiques.

A Attention Un arrangement tient compte de l'ordre et interdit les répétitions ; une p -liste tient compte de l'ordre et autorise les répétitions. Avant de calculer, demande-toi toujours : « l'ordre compte-t-il ? les répétitions sont-elles permises ? »

3. Combinaisons et coefficients binomiaux

D Combinaison

Une combinaison de p éléments parmi n est une partie à p éléments d'un ensemble à n éléments (sans ordre). Leur nombre est le coefficient binomial

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}.$$

Chaque combinaison donne $p!$ arrangements en ordonnant ses éléments : d'où $A_n^p = p! \binom{n}{p}$.

P Propriétés

Pour $0 \leq p \leq n$:

- symétrie : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$;
- formule de Pascal : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$;
- formule du binôme : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$, d'où $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Démonstration de la formule de Pascal. Parmi les parties à $p+1$ éléments de $\{1, \dots, n+1\}$, celles qui contiennent $n+1$ sont en bijection avec les parties à p éléments de $\{1, \dots, n\}$ (on retire $n+1$) : il y en a $\binom{n}{p}$. Celles qui ne le contiennent pas sont des parties à $p+1$ éléments de $\{1, \dots, n\}$: il y en a $\binom{n}{p+1}$. On additionne.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

E

Exemple 3 Un groupe compte 12 élèves dont 5 filles. On choisit un trio de 3 élèves.

Nombre de trios : $\binom{12}{3} = 220$. Trios sans fille : $\binom{7}{3} = 35$. Trios avec au moins une fille : $220 - 35 = 185$ (passage au complémentaire).

M

Méthode : dénombrer

1. Décrire l'expérience par une suite de choix et repérer si l'ordre compte.
2. Si l'ordre compte : n^p (répétitions permises) ou A_n^p (sans répétition) ; sinon $\binom{n}{p}$.
3. Traiter les cas par disjonction (addition), les étapes par multiplication, et penser au complémentaire pour « au moins un ».

4. Espaces probabilisés finis

D

Probabilité

Soit Ω un ensemble fini (l'univers). Une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ est une application $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour deux événements incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. On en déduit $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $P(\emptyset) = 0$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Une probabilité sur un univers fini est entièrement déterminée par les nombres $p_\omega = P(\{\omega\}) \geq 0$, de somme 1 : $P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$. Dans le cas de l'équiprobabilité (tirage « au hasard » sans préférence),

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

E

Exemple 4 On tire simultanément 2 cartes dans un jeu de 32 cartes. Il y a $\binom{32}{2} = 496$ tirages équiprobables. La probabilité de tirer deux cœurs (8 cœurs) est

$$\frac{\binom{8}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{28}{496} = \frac{7}{124}.$$

5. Probabilités conditionnelles

D Probabilité conditionnelle

Si $P(B) > 0$, la probabilité de A sachant B est

$$P_B(A) = P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

L'application P_B est elle-même une probabilité sur Ω .

P Trois formules

- *Probabilités composées* : $P(A \cap B) = P(B) P_B(A)$ et, pour $A_1, \dots, A_n$ avec $P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$,
 $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) \cdots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$.
- *Système complet d'événements* : des événements $B_1, \dots, B_n$ deux à deux incompatibles, de réunion Ω , de probabilités non nulles, forment un système complet.
- *Probabilités totales* : pour un tel système, $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) P_{B_i}(A)$.

E Exemple 5 Une urne contient 4 boules vertes et 6 jaunes. On tire deux boules successivement sans remise. La probabilité de deux boules vertes est

$$\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}, \text{ par la formule des probabilités composées.}$$

6. Formule de Bayes

P Formule de Bayes

Si $P(A) > 0, P(B) > 0$:

$$P_A(B) = \frac{P_B(A) P(B)}{P(A)}.$$

Pour un système complet (B_i) :

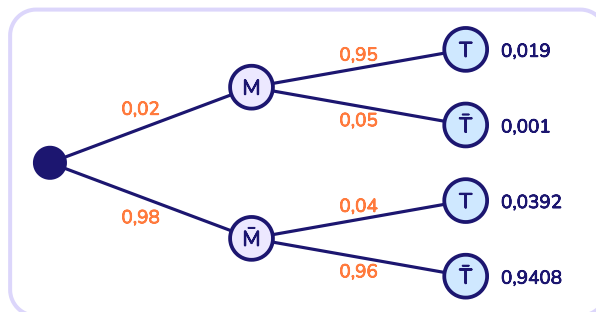
$$P_A(B_j) = \frac{P_{B_j}(A) P(B_j)}{\sum_i P_{B_i}(A) P(B_i)}.$$

Elle inverse un conditionnement : on connaît « la cause donne l'effet », on cherche « l'effet observé, quelle cause ? ». Elle découle de $P(A \cap B) = P(B)P_B(A) = P(A)P_A(B)$, puis des probabilités totales au dénominateur.

E Exemple 6 Une maladie touche 2 % d'une population. Un test est positif dans 95 % des cas chez un malade et dans 4 % des cas chez un sujet sain. Avec M « malade » et T « test positif », les probabilités totales donnent

$$P(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,04 = 0,0582, \text{ puis}$$

$$P_T(M) = \frac{0,019}{0,0582} = \frac{95}{291} \approx 0,326. \text{ Un test positif ne signifie donc qu'environ une chance sur trois d'être malade : la maladie est rare.}$$



7. Indépendance

D Événements indépendants

Deux événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Si $P(B) > 0$, cela équivaut à $P_B(A) = P(A)$: savoir que B est réalisé ne change pas la probabilité de A . Des événements $A_1, \dots, A_n$ sont *mutuellement indépendants* si, pour toute sous-famille d'indices I , $P(\bigcap_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.

P Stabilité

Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B , $\bar{A}$ et $\bar{B}$ le sont aussi. En effet $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(\bar{B})$.

 **Attention** Incompatibles et indépendants sont deux notions très différentes : deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont *jamais* indépendants, puisque $P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B)$.

E Exemple 7 On lance deux dés équilibrés. A : « la somme vaut 7 », B : « le premier dé donne 3 ». $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A)P(B)$: A et B sont indépendants.

8. Variables aléatoires finies, espérance et variance

D Variable aléatoire

Une variable aléatoire réelle finie X est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Sa *loi* est la donnée des valeurs $x_1, \dots, x_r$ prises et des probabilités $p_i = P(X = x_i)$, de somme 1. Son *espérance* est $E(X) = \sum_i x_i p_i$ et sa *variance* $V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_i p_i (x_i - E(X))^2$, l'*écart type* étant $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

P

Propriétés

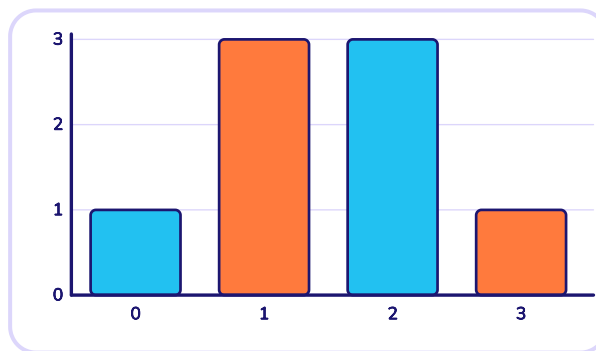
- linéarité : $E(aX + b) = aE(X) + b$;
- transfert : $E(f(X)) = \sum_i f(x_i) p_i$;
- formule de Kœnig-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$;
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

Démonstration de Kœnig-Huygens. Avec $m = E(X)$,

$E((X - m)^2) = E(X^2 - 2mX + m^2) = E(X^2) - 2m E(X) + m^2 = E(X^2) - m^2$, par linéarité.

E

Exemple 8 Trois pièces équilibrées sont lancées ; X est le nombre de piles. La loi est $P(X = k) = \binom{3}{k}/8$, soit $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$. Alors $E(X) = \frac{0+3+6+3}{8} = \frac{3}{2}$, $E(X^2) = \frac{0+3+12+9}{8} = 3$ et $V(X) = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$.



P

Loi binomiale

Si l'on répète n fois, de façon indépendante, une épreuve de succès de probabilité p , le nombre X de succès suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad E(X) = np, \quad V(X) = np(1 - p).$$



Astuce de Zyro Avant de te lancer dans les formules, regarde si l'énoncé parle de répétitions indépendantes à deux issues : c'est le signal d'une loi binomiale. Sinon, dresse le tableau de la loi et calcule $E(X)$ puis $E(X^2)$.

À retenir

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, $|A \times B| = |A||B|$, $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.
- Arrangement : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ (ordre, sans répétition) ; combinaison : $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ (sans ordre).
- Équiprobabilité : $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; probabilités totales ; Bayes : $P_A(B) = \frac{P_B(A)P(B)}{P(A)}$.
- Indépendance : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, à ne pas confondre avec l'incompatibilité.
- $E(X) = \sum x_i p_i$, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, $V(aX + b) = a^2 V(X)$; loi binomiale : $E = np$, $V = np(1 - p)$.

Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)



Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Dénombrement et probabilités :
exercices de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Dénombrement et probabilités : contrôle
de maths Maths Sup

 QCM de maths

Dénombrement et probabilités : QCM de
maths Maths Sup

 Exercices de maths

Logique et raisonnement : exercices de
maths Maths Sup

 Exercices de maths

Nombres complexes et trigonométrie :
exercices de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Logique et raisonnement : contrôle de
maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage