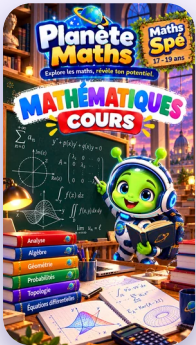


Probabilités et variables aléatoires discrètes : cours de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

En deuxième année, les probabilités quittent le cadre fini : on lance une pièce sans jamais s'arrêter, on compte des appels jusqu'à la première panne, on additionne une infinité de possibilités. Les séries remplacent les sommes finies, et il faut justifier chaque passage à la limite. Ce chapitre pose le cadre rigoureux (tribus, σ -additivité, continuité monotone), puis étudie les variables aléatoires discrètes, leurs lois usuelles, leurs moments, leur fonction génératrice et les inégalités qui conduisent à la loi faible des grands nombres.

1. Espaces probabilisés

D Tribu et probabilité

Une **tribu** sur un ensemble Ω est une famille $\mathcal{A}$ de parties de Ω qui contient Ω , qui est stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable. Une **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et qui est **σ -additive** : pour toute suite (A_n) d'événements deux à deux incompatibles,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ s'appelle un **espace probabilisé**. Un **système complet d'événements** est une famille finie ou dénombrable (A_i) d'événements deux à deux incompatibles dont la réunion est Ω . Pour tout événement B , on a alors la formule des probabilités totales $\mathbb{P}(B) = \sum_i \mathbb{P}(B \cap A_i)$, et si $\mathbb{P}(A_i) > 0$ pour tout i , $\mathbb{P}(B) = \sum_i \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}(B \mid A_i)$.

E Exemple 1 : une loi sur les entiers

Sur $\Omega = \mathbb{N}^*$, posons $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$. Comme $\sum_{n \geq 1} 2^{-n} = 1$, c'est bien une probabilité. L'événement « n est pair » est la réunion dénombrable des singletons $\{2k\}$, donc sa probabilité vaut $\sum_{k \geq 1} 4^{-k} = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}$. Celle de « n impair » vaut $\frac{2}{3}$.

Une conséquence immédiate de la σ -additivité : si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$, et pour une suite quelconque, $\mathbb{P}(\bigcup A_n) \leq \sum \mathbb{P}(A_n)$ (sous-additivité).

2. Continuité monotone

P

Continuité monotone d'une probabilité

Si (A_n) est une suite **croissante** d'événements ($A_n \subset A_{n+1}$), alors

$\mathbb{P}(\bigcup_n A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$. Si (A_n) est **décroissante**, alors

$\mathbb{P}(\bigcap_n A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Idée de la démonstration. Pour la suite croissante, posons $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$. Les B_n sont deux à deux incompatibles, $A_n = B_0 \cup \dots \cup B_n$ et $\bigcup A_n = \bigcup B_n$. Par σ -additivité, $\mathbb{P}(\bigcup A_n) = \sum_k \mathbb{P}(B_k) = \lim_n \sum_{k \leq n} \mathbb{P}(B_k) = \lim_n \mathbb{P}(A_n)$. Le cas décroissant s'obtient en passant aux complémentaires.

E

Exemple 2 : jamais de pile ?

On lance indéfiniment une pièce qui donne pile avec la probabilité $\frac{1}{3}$, les lancers étant indépendants. Soit A_n : « aucun pile lors des n premiers lancers ». La suite (A_n) est décroissante et $\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$. L'événement « on n'obtient jamais pile » est $\bigcap A_n$: sa probabilité est nulle. Pile apparaît donc **presque sûrement**, bien que « jamais pile » ne soit pas impossible.

A

Attention

Un événement de probabilité nulle n'est pas forcément impossible, et un événement de probabilité 1 n'est pas forcément certain. On dit seulement « presque sûr » ou « négligeable ».

3. Variables aléatoires discrètes

D Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est dite **discrète** si l'ensemble $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et si, pour tout $x \in X(\Omega)$, $\{X = x\} \in \mathcal{A}$. Sa **loi** est la famille $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$; la somme de cette famille vaut 1, puisque les $\{X = x\}$ forment un système complet d'événements.

La **fonction de répartition** $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ est croissante, continue à droite, de limite 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$. Si φ est une fonction définie sur $X(\Omega)$, $Y = \varphi(X)$ est encore une variable discrète et $\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x: \varphi(x)=y} \mathbb{P}(X = x)$.

E Exemple 3 : une queue de loi qui se télescope

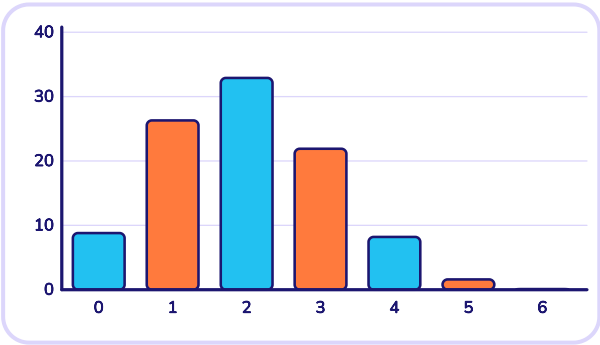
Posons $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour $k \geq 1$. La somme télescopique vaut 1, donc c'est une loi. Pour $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{k \geq n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{n}$. Cette décroissance en $1/n$ est lente, et nous verrons que X n'a pas d'espérance.

4. Lois usuelles

Cinq lois suffisent à modéliser l'essentiel des situations : **uniforme** (équiprobabilité), **Bernoulli** (un succès ou un échec), **binomiale** (nombre de succès en n épreuves indépendantes), **géométrique** (rang du premier succès) et **Poisson** (événements rares). On note $q = 1 - p$.

Loi	Valeurs	$\mathbb{P}(X = k)$	$\mathbb{E}(X)$	$V(X)$
Uniforme $\mathcal{U}(\{1, \dots, n\})$	$1 \leq k \leq n$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$0, 1$	$p^k q^{1-k}$	p	pq
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$0 \leq k \leq n$	$\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$	np	npq
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$k \geq 1$	$p q^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$k \geq 0$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ

Voici la loi binomiale $\mathcal{B}(6, \frac{1}{3})$: la barre la plus haute correspond au mode $k = 2$, voisin de l'espérance $np = 2$.



P**Deux propriétés à connaître**

(a) **Absence de mémoire.** Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\mathbb{P}(X > n) = q^n$ et $\mathbb{P}(X > n + m \mid X > n) = \mathbb{P}(X > m)$. Réciproquement, c'est la seule loi sur $\mathbb{N}^*$ qui possède cette propriété.

(b) **Approximation de Poisson.** Si $np_n \rightarrow \lambda > 0$, alors pour tout k fixé,

$$\binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

M**Méthode : reconnaître la loi d'une variable**

1. Décrire l'épreuve élémentaire et vérifier que les répétitions sont indépendantes avec la même probabilité de succès p .
2. Si l'on compte les succès sur un nombre fixé n d'épreuves : loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
3. Si l'on attend le premier succès : loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.
4. Si l'on compte des événements rares sur une durée ou une surface, de moyenne λ : loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

⚠**Attention**

Certains auteurs définissent la loi géométrique comme le nombre d'échecs avant le premier succès, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Ici, X est le **rang** du premier succès : l'espérance vaut $1/p$ et non q/p .

5. Espérance et variance

D Espérance

Une variable discrète réelle X admet une **espérance** si la famille $(x \mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable (la série converge absolument). On pose alors $\mathbb{E}(X) = \sum_x x \mathbb{P}(X = x)$. Pour une variable positive, la somme existe toujours dans $[0, +\infty]$.

P Propriétés

(1) **Théorème de transfert** : $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_x \varphi(x) \mathbb{P}(X = x)$, à condition que cette famille soit sommable. (2) L'espérance est linéaire, positive et croissante sur l'ensemble des variables qui en admettent une. (3) Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$.

Lorsque X^2 admet une espérance, la **variance** est $V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ (formule de König-Huygens), et $V(aX + b) = a^2 V(X)$. L'écart type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

E Exemple 4 : espérance d'une loi géométrique

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\mathbb{P}(X \geq n) = q^{n-1}$, donc $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \geq 1} q^{n-1} = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$.

Pour $p = \frac{1}{4}$ on obtient une espérance de 4 épreuves. Dans l'exemple 3, au contraire, $\sum k \mathbb{P}(X = k) = \sum \frac{1}{k+1}$ diverge : X n'a pas d'espérance, bien que X soit finie presque sûrement.

6. Fonction génératrice

D Fonction génératrice

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, sa fonction génératrice est

$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n) t^n$. Le rayon de convergence de cette série entière est au moins 1, la série converge normalement sur $[-1, 1]$, et $G_X(1) = 1$.

P Ce que G_X apporte

(1) G_X caractérise la loi : $\mathbb{P}(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$. (2) X a une espérance si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1, et alors $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$. (3) X a une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable à gauche en 1 ; alors $\mathbb{E}(X(X-1)) = G''_X(1)$ et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$. (4) Si X et Y sont indépendantes, $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

Loi

Fonction génératrice

$\mathcal{B}(p)$

$q + pt$

$\mathcal{B}(n, p)$

$(q + pt)^n$

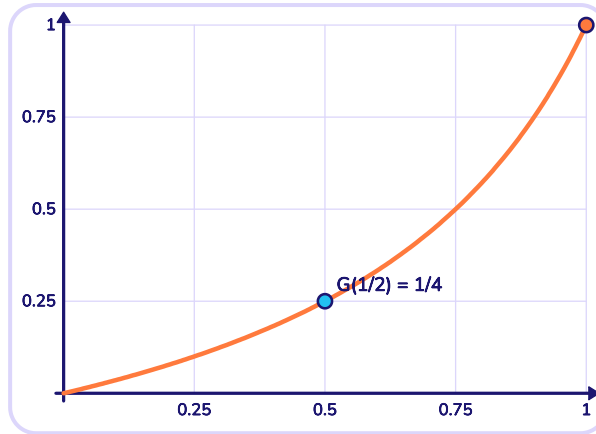
$\mathcal{G}(p)$

$\frac{pt}{1 - qt}$ pour $|t| < 1/q$

$\mathcal{P}(\lambda)$

$e^{\lambda(t-1)}$

La courbe ci-dessous représente $G(t) = \frac{t}{3-2t}$, fonction génératrice de $\mathcal{G}(\frac{1}{3})$: elle est croissante, convexe, passe par $(1, 1)$ avec une pente $G'(1) = 3$ égale à l'espérance.



E Exemple 5 : somme de deux lois de Poisson

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ sont indépendantes, alors

$G_{X+Y}(t) = e^{\lambda(t-1)}e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$. Cette fonction caractérise $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$: la somme suit donc une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

7. Inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchebychev et loi faible des grands nombres

P Inégalité de Markov

Si $X \geq 0$ admet une espérance, alors pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$.

Preuve. On a $a \mathbf{1}_{\{X \geq a\}} \leq X$; en prenant l'espérance, $a \mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}(X)$.

P Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Si X admet une variance, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

Preuve. On applique Markov à la variable positive $(X - \mathbb{E}(X))^2$ avec $a = \varepsilon^2$.

P**Loi faible des grands nombres**

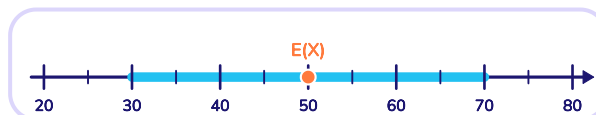
Soit (X_n) une suite de variables indépendantes, de même loi, d'espérance m et de variance σ^2 . Notons $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$. Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|M_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

La preuve utilise $\mathbb{E}(M_n) = m$ et $V(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$, puis Bienaymé-Tchebychev. La moyenne empirique se concentre donc autour de l'espérance, à la vitesse $1/n$ pour cette majoration.

E**Exemple 6 : cent lancers**

Soit $X \sim \mathcal{B}(100, \frac{1}{2})$: $\mathbb{E}(X) = 50$ et $V(X) = 25$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $\mathbb{P}(|X - 50| \geq 20) \leq \frac{25}{400} = \frac{1}{16}$. Autrement dit, avec une probabilité au moins égale à $\frac{15}{16}$, le nombre de piles reste dans la bande $]30, 70[$ représentée ci-dessous.

**!****Astuce de Zyro**

Avant de calculer une probabilité exacte, demande-toi si une majoration suffit : Markov ne demande que l'espérance, Tchebychev l'espérance et la variance. Ces bornes sont grossières mais valables pour toutes les lois.

8. Indépendance et couples

Un **couple** (X, Y) de variables discrètes a pour loi conjointe la famille $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$. Les **lois marginales** s'en déduisent par sommation : $\mathbb{P}(X = x) = \sum_y \mathbb{P}(X = x, Y = y)$, et de même pour Y .

D Indépendance

Les variables X et Y sont **indépendantes** si, pour tous x, y ,
 $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y)$. Une famille (X_i) est **mutuellement indépendante** si cette factorisation vaut pour toute sous-famille finie.

P Conséquences

Si X et Y sont indépendantes et intégrables, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Plus généralement, la **covariance** $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ vérifie
 $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$. Pour des variables indépendantes, la covariance est nulle et les variances s'additionnent. La loi de la somme est la **convolution** : $\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k)$ pour des variables à valeurs dans $\mathbb{N}$.

E Exemple 7 : retrouver la variance binomiale

Une variable $S \sim \mathcal{B}(n, p)$ est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de variance pq . Donc $V(S) = npq$. Avec $n = 30$ et $p = 0,2$, $\mathbb{E}(S) = 6$ et
 $V(S) = 30 \times 0,2 \times 0,8 = 4,8$.



Attention

La réciproque est fautive : covariance nulle n'entraîne pas indépendance. Si X est uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et $Y = X^2$, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^3) = 0 = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, mais $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0 \neq \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$.

À retenir

- Une probabilité est σ -additive ; elle est continue sur les suites monotones d'événements.
- La loi d'une variable discrète est une famille de réels positifs de somme 1 ; l'espérance exige la convergence absolue.
- Lois usuelles : $\mathcal{B}(n, p)$ d'espérance np , $\mathcal{G}(p)$ d'espérance $1/p$, $\mathcal{P}(\lambda)$ d'espérance et de variance λ .
- $G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$ caractérise la loi, $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$, et $G_{X+Y} = G_X G_Y$ pour des variables indépendantes.
- Markov : $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}(X)/a$; Bienaymé-Tchebychev : $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq V(X)/\varepsilon^2$.
- Indépendance : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$; covariance nulle ne signifie pas indépendance.

Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Probabilités et variables aléatoires
discrètes : exercices de maths Maths Spé

 Contrôles de maths

Probabilités et variables aléatoires
discrètes : contrôle de maths Maths Spé

 QCM de maths

Probabilités et variables aléatoires
discrètes : QCM de maths Maths Spé

 Exercices de maths

Algèbre générale et dualité : exercices de
maths Maths Spé

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Courbes, surfaces et géométrie
euclidienne : exercices de maths Maths
Spé

Algèbre générale et dualité : contrôle de
maths Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage