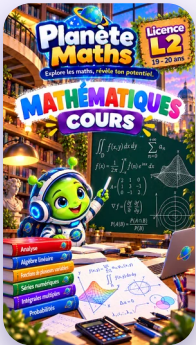


Probabilités sur un univers dénombrable : cours de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Lancer un dé jusqu'à obtenir un six, compter les appels reçus par un standard en une heure, suivre une marche aléatoire : dans toutes ces situations l'ensemble des issues est infini mais on peut les numéroter. C'est le cadre des probabilités discrètes, où les séries remplacent les sommes finies et où l'on contrôle tout par des théorèmes de sommation.

1. Espace probabilisé discret

Un univers Ω est dit **dénombrable** s'il est fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$. Dans ce chapitre la tribu des événements est l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ de toutes les parties de Ω .

D Probabilité

Une probabilité sur Ω est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et, pour toute suite (A_n) d'événements deux à deux incompatibles,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mathbb{P}(A_n) \text{ } (\sigma\text{-additivité}).$$

P**Caractérisation**

Si $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\})$, alors $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ et $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$. Réciproquement, toute famille (p_ω) de réels positifs de somme 1 définit une unique probabilité.

P**Propriétés**

$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$; si $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$; sous-additivité $\mathbb{P}(\bigcup A_n) \leq \sum \mathbb{P}(A_n)$.

Continuité : si (A_n) est croissante, $\mathbb{P}(\bigcup A_n) = \lim \mathbb{P}(A_n)$; si elle est décroissante, $\mathbb{P}(\bigcap A_n) = \lim \mathbb{P}(A_n)$.

E

Exemple 1 Sur $\Omega = \mathbb{N}^*$ posons $p_k = 2^{-k}$. Comme $\sum_{k \geq 1} 2^{-k} = 1$, c'est une probabilité. L'événement « k est pair » a pour probabilité $\sum_{j \geq 1} 2^{-2j} = \frac{1/4}{1 - 1/4} = \frac{1}{3}$.

2. Probabilité conditionnelle

D**Conditionnement**

Si $\mathbb{P}(B) > 0$, la probabilité de A sachant B est $\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. L'application $A \mapsto \mathbb{P}(A | B)$ est elle-même une probabilité.

P**Formules**

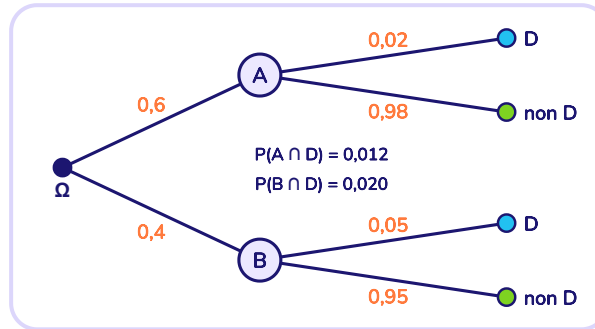
Composition : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(A | B)$. *Probabilités totales* : si (B_i) est un système complet d'événements (fini ou dénombrable, de probabilités non nulles),

$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(B_i) \mathbb{P}(A | B_i)$. *Bayes* : $\mathbb{P}(B_j | A) = \frac{\mathbb{P}(B_j) \mathbb{P}(A | B_j)}{\sum_i \mathbb{P}(B_i) \mathbb{P}(A | B_i)}$.

M

Méthode

Dessiner un arbre pondéré : les branches du premier niveau portent $\mathbb{P}(B_i)$, celles du second $\mathbb{P}(A | B_i)$. On multiplie le long d'un chemin, on additionne les chemins qui mènent à A .



E

Exemple 2 Une machine A produit 60 % des pièces d'un atelier, dont 2 % sont défectueuses ; une machine B produit le reste, dont 5 % sont défectueuses. Par les probabilités totales, $\mathbb{P}(D) = 0,6 \times 0,02 + 0,4 \times 0,05 = 0,032$. Par la formule de Bayes, $\mathbb{P}(B | D) = \frac{0,020}{0,032} = \frac{5}{8}$: une pièce défectueuse vient de B dans 62,5 % des cas, bien que B produise moins.

3. Indépendance

D

Indépendance

Deux événements sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Une famille (A_i) est **mutuellement indépendante** si, pour toute sous-famille finie J ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i).$$

⚠

Deux pièges Des événements indépendants deux à deux ne sont pas forcément mutuellement indépendants. Et deux événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont *jamais* indépendants, puisque $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

4. Variables aléatoires discrètes

Une variable aléatoire discrète est une application $X : \Omega \rightarrow E$ où E est dénombrable (le plus souvent une partie de $\mathbb{R}$). Sa loi est la famille $(x, \mathbb{P}(X = x))$, de somme 1. Pour toute fonction φ , on a le *théorème de transfert* : $\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_x \varphi(x) \mathbb{P}(X = x)$ dès que la série converge absolument. Deux variables X et Y sont indépendantes si $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$ pour tous x, y .

5. Espérance et variance

D Espérance, variance

X admet une espérance si $\sum |x| \mathbb{P}(X = x)$ converge ; alors $\mathbb{E}(X) = \sum x \mathbb{P}(X = x)$. Si X^2 est d'espérance finie, $\text{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

P Propriétés

Linéarité de l'espérance ; $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$; si X et Y sont indépendantes, $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$. Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k)$.

E

Exemple 3 Soit X de loi $\mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{15}$ pour $k = 1, \dots, 5$. Alors

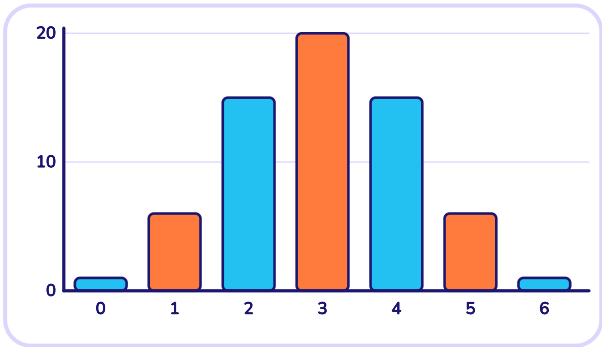
$$\mathbb{E}(X) = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25}{15} = \frac{11}{3}, \quad \mathbb{E}(X^2) = \frac{1 + 8 + 27 + 64 + 125}{15} = 15,$$

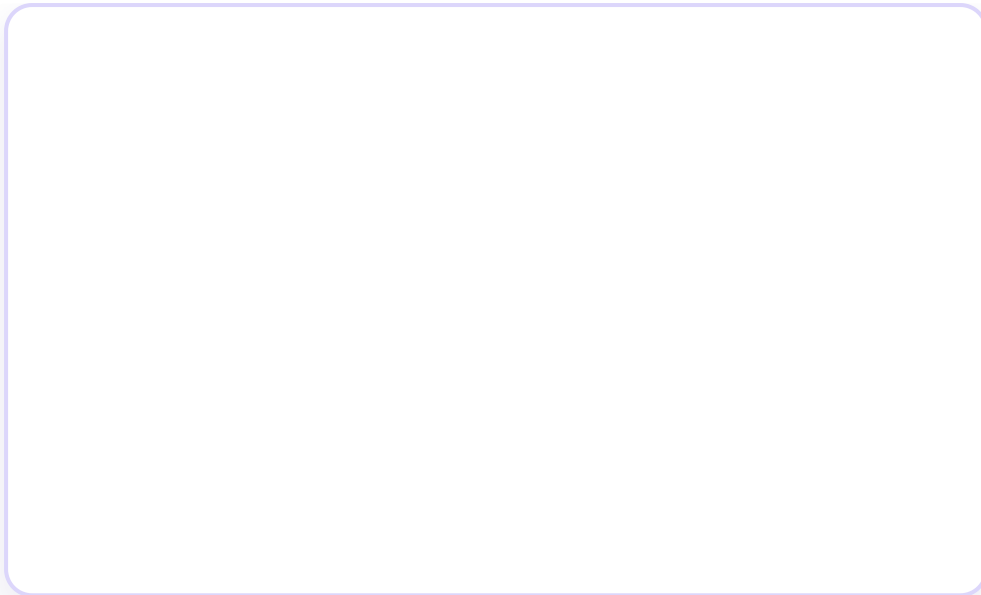
donc $\text{Var}(X) = 15 - \frac{121}{9} = \frac{14}{9}$.

6. Lois usuelles

Loi	Valeurs et probabilité	Espérance	Variance
Bernoulli $\mathcal{B}(p)$	$\mathbb{P}(X = 1) = p$	p	$p(1 - p)$
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k},$ $0 \leq k \leq n$	np	$np(1 - p)$
Géométrique $\mathcal{G}(p)$	$p(1 - p)^{k-1}, k \geq 1$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1 - p}{p^2}$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, k \geq 0$	λ	λ
Uniforme sur $\{1, \dots, n\}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{n + 1}{2}$	$\frac{n^2 - 1}{12}$

La loi binomiale compte les succès de n épreuves indépendantes ; la loi géométrique donne le rang du premier succès ; la loi de Poisson modélise les événements rares (elle approche $\mathcal{B}(n, p)$ quand n est grand, p petit et $np \approx \lambda$).





Probabilités discrètes Licence L2 : diagrammes en barres de trois lois de Poisson de paramètres 1, 3 et 6, qui s'étalent et se décalent quand le paramètre augmente

E **Exemple 4** Un joueur lance une pièce amenant pile avec la probabilité $\frac{1}{4}$ jusqu'au premier pile. Le rang X suit $\mathcal{G}(1/4)$. Alors $\mathbb{P}(X > 3) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$ et $\mathbb{E}(X) = 4$. La loi géométrique est sans mémoire : $\mathbb{P}(X > m + n \mid X > m) = \mathbb{P}(X > n)$.

! **Zyro** Pour reconnaître une loi, demande-toi ce qu'on compte : des succès parmi n essais (binomiale), un temps d'attente (géométrique), des arrivées rares (Poisson).

7. Fonction génératrice

D Fonction génératrice

Pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$, $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X = n) s^n$. La série converge normalement sur $[-1, 1]$ et $G_X(1) = 1$.

P**Propriétés**

(i) G_X détermine la loi de X (unicité des coefficients d'une série entière). (ii) $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$ lorsque cette dérivée à gauche est finie, et alors $\text{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$. (iii) Si X et Y sont indépendantes, $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

E

Exemple 5 On a $G_{\mathcal{B}(n,p)}(s) = (1 - p + ps)^n$. Si $X \sim \mathcal{B}(5, 0,3)$ et $Y \sim \mathcal{B}(7, 0,3)$ sont indépendantes, $G_{X+Y}(s) = (0,7 + 0,3s)^{12}$: la somme suit $\mathcal{B}(12; 0,3)$, d'espérance **3,6**.

8. Inégalités de concentration et loi faible des grands nombres**P****Markov**

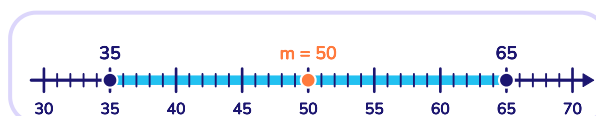
Si $X \geq 0$ admet une espérance et $a > 0$, alors $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$.

Preuve. On a $a \mathbf{1}_{\{X \geq a\}} \leq X$; on prend l'espérance.

P**Bienaymé-Tchebychev**

Si X admet une variance et $\varepsilon > 0$, alors $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\varepsilon^2}$.

Preuve. Markov appliquée à $(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq 0$ avec $a = \varepsilon^2$.

**E**

Exemple 6 Si $\mathbb{E}(X) = 50$ et $\sigma = 5$, alors avec $\varepsilon = 15$:

$\mathbb{P}(|X - 50| \geq 15) \leq \frac{25}{225} = \frac{1}{9}$, donc X est dans $]35; 65[$ avec une probabilité au moins égale à $\frac{8}{9}$.

P**Loi faible des grands nombres**

Soit (X_i) des variables indépendantes de même loi, d'espérance m et de variance σ^2 .

Si $S_n = X_1 + \dots + X_n$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Preuve. $\mathbb{E}(S_n/n) = m$ et, par indépendance, $\text{Var}(S_n/n) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$; on applique Bienaymé-Tchebychev.

Probabilités discrètes Licence L2 : trois courbes de moyennes de lancers d'un dé qui se resserrent autour de 3,5 quand le nombre de lancers augmente

À retenir

- Sur un univers dénombrable, $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_{\omega}$ avec $\sum p_{\omega} = 1$; la σ -additivité donne la continuité monotone.
- Probabilités totales et Bayes s'appliquent à un système complet ; un arbre pondéré organise le calcul.
- Indépendance mutuelle $\neq$ indépendance deux à deux ; incompatibles non négligeables $\Rightarrow$ dépendants.
- Espérance : convergence absolue exigée ; $\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$; additivité de la variance si indépendance.
- Lois usuelles : np , $np(1-p)$; $1/p$, $(1-p)/p^2$; λ , λ .
- $G_X(s) = \mathbb{E}(s^X)$: $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$, $G_{X+Y} = G_X G_Y$ si indépendance.
- Markov, Bienaymé-Tchebychev, puis loi faible des grands nombres :
 $\mathbb{P}(|S_n/n - m| \geq \varepsilon) \leq \sigma^2/(n\varepsilon^2)$.

Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.

 Lancer le défi

  **Zyro te conseille la suite**

 **Exercices de maths**

Probabilités sur un univers dénombrable
: exercices de maths Licence L2

 **Contrôles de maths**

Probabilités sur un univers dénombrable
: contrôle de maths Licence L2

 **QCM de maths**

Probabilités sur un univers dénombrable
: QCM de maths Licence L2

 **Exercices de maths**

Espaces vectoriels et applications
linéaires : exercices de maths Licence L2

 Exercices de maths

Réduction des endomorphismes :
exercices de maths Licence L2

 Contrôles de maths

Espaces vectoriels et applications
linéaires : contrôle de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage