

Probabilités et variables aléatoires discrètes : exercices corrigés de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Une loi à normaliser



La somme des probabilités vaut 1 : $c(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 15c = 1$, donc $c = \frac{1}{15}$.

$$\mathbb{P}(X \geq 4) = \frac{4 + 5}{15} = \frac{3}{5}.$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^5 k \cdot \frac{k}{15} = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25}{15} = \frac{55}{15} = \frac{11}{3}.$$

2 Lancers francs



On répète 5 épreuves indépendantes de même probabilité de succès : $X \sim \mathcal{B}(5; 0,7)$.

$$\mathbb{P}(X = 4) = \binom{5}{4} (0,7)^4 (0,3) = 5 \times 0,2401 \times 0,3 = 0,36015.$$

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - 0,3^5 = 1 - 0,00243 = 0,99757.$$

Elle réussit donc au moins un panier avec une probabilité d'environ **99,8 %**.

3 Atterrissage d'un drone



$$X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{4}) \text{ avec } q = \frac{3}{4}.$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = q^2 p = \frac{9}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{64}.$$

$$\mathbb{P}(X > 5) = q^5 = \frac{243}{1024} \text{ (les cinq premières tentatives échouent).}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = 4 \text{ tentatives en moyenne.}$$

4 Messages reçus

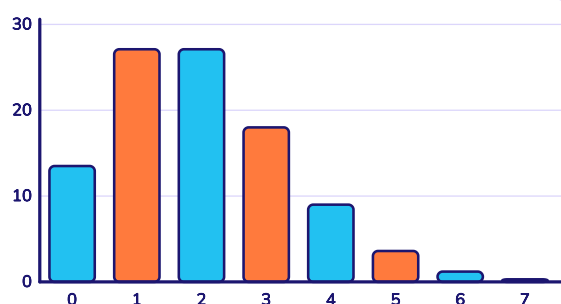


$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{-2} \approx 0,135.$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = e^{-2} \frac{2^2}{2!} = 2e^{-2} \approx 0,271.$$

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - e^{-2} \approx 0,865.$$

Le diagramme donne les probabilités en pourcentage pour k de 0 à 7 ; les valeurs $k = 1$ et $k = 2$ sont en tête, à égalité avec **27,1 %** chacune, tandis que $k = 0$ vaut **13,5 %**.



5 Dé à douze faces



X suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, 12\}$ donc $\mathbb{E}(X) = \frac{12+1}{2} = 6,5$ euros.

$$V(X) = \frac{12^2 - 1}{12} = \frac{143}{12} \approx 11,92, \text{ soit un écart type d'environ } 3,45 \text{ euros.}$$

6 Vrai ou faux ?



a. **Vrai.** $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

b. **Faux.** Avec $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$, la série $\sum k \mathbb{P}(X = k) = \sum \frac{1}{k+1}$ diverge.

c. **Vrai.** La covariance est nulle, donc

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = V(X) + V(Y).$$

d. **Faux.** Contre-exemple : X uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$, $Y = X^2$. La covariance est nulle, mais $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0 \neq \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$.

7 Une loi en puissances de 3



$$\sum_{n \geq 0} 3^{-n} = \frac{1}{1 - 1/3} = \frac{3}{2}, \text{ donc } a \times \frac{3}{2} = 1 \text{ et } a = \frac{2}{3}.$$

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = \frac{2}{3} \sum_{n \geq 2} 3^{-n} = \frac{2}{3} \times \frac{1/9}{2/3} = \frac{1}{9}.$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2}{3} \sum_{n \geq 0} n 3^{-n} = \frac{2}{3} \times \frac{1/3}{(2/3)^2} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

8

Au moins un six

★★★

(a) Le complémentaire de A_n est « pas de 6 en n lancers » : $\mathbb{P}(A_n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$. La suite (A_n) est croissante ; par continuité monotone, $\mathbb{P}\left(\bigcup A_n\right) = \lim \mathbb{P}(A_n) = 1$: un 6 finit presque sûrement par sortir.

(b) On veut $\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,01$, soit $n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln(5/6)} \approx 25,26$. Le plus petit entier est $n = 26$ (on vérifie : $1 - (5/6)^{25} \approx 0,9895 < 0,99$ et $1 - (5/6)^{26} \approx 0,9913$).

9

Fonction de répartition et transfert

★★★

(a) $F(x) = 0$ si $x < 1$; $0,2$ si $1 \leq x < 2$; $0,7$ si $2 \leq x < 3$; 1 si $x \geq 3$.

(b) $\mathbb{P}(1$

(c) $Y = 0$ si $X = 2$, $Y = 1$ si $X \in \{1, 3\}$: $\mathbb{P}(Y = 0) = 0,5$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = 0,2 + 0,3 = 0,5$. Ainsi $Y \sim \mathcal{B}(0,5)$, $\mathbb{E}(Y) = 0,5$ et $V(Y) = 0,5 \times 0,5 = 0,25$.

10

Puces défectueuses

★★★

$X \sim \mathcal{B}(20; 0,05)$, donc $\mathbb{E}(X) = 1$ et $V(X) = 20 \times 0,05 \times 0,95 = 0,95$.

$\mathbb{P}(X = 0) = 0,95^{20} \approx 0,358$.

$\mathbb{P}(X = 1) = 20 \times 0,05 \times 0,95^{19} \approx 0,377$, donc $\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - 0,358 - 0,377 \approx 0,264$.

11 Poisson contre binomiale



$X \sim \mathcal{B}(400; 0,005)$ et $\lambda = 400 \times 0,005 = 2$.

Valeur exacte : $\binom{400}{3} (0,005)^3 (0,995)^{397} \approx 0,1809$.

Approximation : $e^{-2} \frac{2^3}{3!} = \frac{4}{3} e^{-2} \approx 0,1804$.

L'écart est inférieur à 10^{-3} : n est grand et p petit, l'approximation est excellente.

12 Décoder une fonction génératrice



$G(t) = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t\right)^3$: c'est la fonction génératrice de $\mathcal{B}(3, \frac{1}{3})$.

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

$$G'(t) = \frac{3(2+t)^2}{27}, \text{ donc } \mathbb{E}(X) = G'(1) = 1. \quad G''(t) = \frac{6(2+t)}{27}, \text{ donc } G''(1) = \frac{2}{3}.$$

$$V(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2 = \frac{2}{3} + 1 - 1 = \frac{2}{3}, \text{ ce qui coïncide avec } npq = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}.$$

13 Fréquentation d'un site



(a) $X \geq 0$: Markov donne $\mathbb{P}(X \geq 200) \leq \frac{40}{200} = 0,2$.

(b) Bienaymé-Tchebychev : $\mathbb{P}(|X - 40| \geq 30) \leq \frac{100}{900} = \frac{1}{9}$.

(c) L'événement $\setminus(10$

14 Loi conjointe



Lois marginales : $\mathbb{P}(X = 0) = 0,4$, $\mathbb{P}(X = 1) = 0,6$; $\mathbb{P}(Y = 0) = 0,25$, $\mathbb{P}(Y = 1) = 0,5$, $\mathbb{P}(Y = 2) = 0,25$.

On vérifie les six produits : $0,4 \times 0,25 = 0,10$, $0,4 \times 0,5 = 0,20$, $0,4 \times 0,25 = 0,10$, $0,6 \times 0,25 = 0,15$, $0,6 \times 0,5 = 0,30$, $0,6 \times 0,25 = 0,15$. Tous coïncident avec le tableau : X et Y sont indépendantes.

$$\mathbb{E}(X) = 0,6, \mathbb{E}(Y) = 0,5 + 0,5 = 1 \text{ et}$$

$$\mathbb{E}(XY) = 0,30 \times 1 + 0,15 \times 2 = 0,6 = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

15 Somme de deux lois de Poisson



(a)

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n e^{-2} \frac{2^k}{k!} e^{-3} \frac{3^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-5}}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} = \frac{e^{-5}}{n!} (2+3)^n$$

d'après la formule du binôme.

$$(b) \mathbb{P}(X + Y = 4) = e^{-5} \frac{625}{24} \approx 0,1755.$$

(c)

$$\mathbb{P}(X = 1 \mid X + Y = 4) = \frac{\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 3)}{\mathbb{P}(X + Y = 4)} = \frac{e^{-2} \cdot 2 \cdot e^{-3} \cdot 27/6}{e^{-5} \cdot 625/24} = \frac{9 \times 24}{625} = \frac{216}{625}$$

. C'est $\binom{4}{1} \left(\frac{2}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^3$: conditionnellement, X suit $\mathcal{B}(4, \frac{2}{5})$.

16 Le plus rapide des deux



(a) $\{T > n\} = \{X > n\} \cap \{Y > n\}$; par indépendance,

$$\mathbb{P}(T > n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n. \text{ Comme}$$

$$\mathbb{P}(T = n) = \mathbb{P}(T > n-1) - \mathbb{P}(T > n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, T \sim \mathcal{G}(\frac{1}{2}) \text{ et } \mathbb{E}(T) = 2 \text{ jours.}$$

$$(b) \mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k \geq 1} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{12} \times 2 = \frac{1}{6}.$$

17 Maximum et minimum de deux dés

★★★

$$(a) \mathbb{P}(M \leq k) = \frac{k^2}{16}, \text{ donc } \mathbb{P}(M = k) = \frac{k^2 - (k-1)^2}{16} = \frac{2k-1}{16}. \text{ Alors}$$

$$\mathbb{E}(M) = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7}{16} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}.$$

$$(b) \mathbb{E}(m) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(M) = 5 - \frac{25}{8} = \frac{15}{8}.$$

$$(c) \mathbb{E}(Mm) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \text{ par indépendance. Donc}$$

$$\text{Cov}(M, m) = \frac{25}{4} - \frac{25}{8} \times \frac{15}{8} = \frac{400 - 375}{64} = \frac{25}{64}. \text{ Les deux variables sont}$$

positivement corrélées, donc non indépendantes.

18 Retrouver une loi par sa fonction génératrice

★★★

$$(a) G(t) = \frac{t/2}{1 - t/2} = \frac{pt}{1 - qt} \text{ avec } p = q = \frac{1}{2} : X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{2}), \mathbb{E}(X) = 2,$$

$$V(X) = \frac{1/2}{1/4} = 2.$$

$$(b) G_S(t) = \frac{t^3}{(2-t)^3} = \frac{t^3}{8} \left(1 - \frac{t}{2}\right)^{-3} = \frac{t^3}{8} \sum_{j \geq 0} \binom{j+2}{2} \frac{t^j}{2^j}. \text{ Le coefficient de } t^n$$

(avec $j = n - 3$) est $\binom{n-1}{2} \frac{1}{2^n}$.

$$\mathbb{P}(S = 5) = \binom{4}{2} \frac{1}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}. \text{ Par indépendance, } \mathbb{E}(S) = 3 \times 2 = 6 \text{ et}$$

$$V(S) = 3 \times 2 = 6.$$

19 Une population qui s'éclaircit

★★★★

(a) Les $\{N = n\}$ forment un système complet ; conditionnellement à $N = n$, $Y \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. La formule des probabilités totales donne le résultat (le terme est nul pour $n < k$)

(b)

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n \geq k} e^{-4} \frac{4^n}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} 2^{-n} = \frac{e^{-4}}{k!} \sum_{n \geq k} \frac{2^n}{(n-k)!} = \frac{e^{-4} 2^k}{k!} \sum_{j \geq 0} \frac{2^j}{j!} = e^{-2}$$

(c) $\mathbb{P}(Y = 0) = e^{-2} \approx 0,135$. Le « amincissement » d'une loi de Poisson par des survies indépendantes reste une loi de Poisson.

20 Combien de lancers suffisent ?

★★★★

$$M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \text{ avec } X_i \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2}) \text{ indépendantes : } \mathbb{E}(M_n) = \frac{1}{2}, V(M_n) = \frac{1/4}{n}.$$

$$\text{Bienaymé-Tchebychev : } \mathbb{P}(|M_n - \frac{1}{2}| \geq 0,05) \leq \frac{1/(4n)}{0,0025} = \frac{100}{n}.$$

La condition $\frac{100}{n} \leq 0,05$ équivaut à $n \geq 2000$. Il suffit donc de 2000 lancers (la borne est large : une étude fine donnerait bien moins).

21 Un jeu sans espérance

★★★★

(a) $\sum_{k \geq 1} 2^{-k} = 1$. Mais $\sum_k 2^k \mathbb{P}(X = 2^k) = \sum_k 1$ diverge : pas d'espérance.

(b) $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{10} 2^k 2^{-k} + 2^{10} \mathbb{P}(X > 2^{10}) = 10 + 2^{10} \times 2^{-10} = 10 + 1 = 11$ euros. Le plafond rend l'espérance finie : l'entrée équitable est 11 euros.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Probabilités et variables aléatoires
discrètes : exercices de maths Maths Spé

QCM de maths

Probabilités et variables aléatoires
discrètes : QCM de maths Maths Spé

Contrôles de maths

Probabilités et variables aléatoires
discrètes : contrôle de maths Maths Spé

Exercices de maths

Algèbre générale et dualité : exercices de
maths Maths Spé

 Exercices de maths

Courbes, surfaces et géométrie
euclidienne : exercices de maths Maths
Spé

 QCM de maths

Algèbre générale et dualité : QCM de
maths Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage