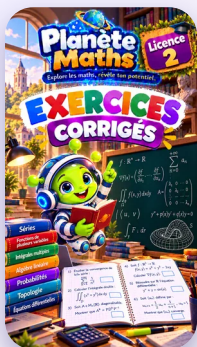


# Probabilités sur un univers dénombrable : exercices corrigés de maths Licence L2 à télécharger en PDF



## Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

### 1 Une loi en $k^2$



La somme des probabilités vaut 1 :  $c(1 + 4 + 9 + 16) = 30c = 1$ , donc  $c = \frac{1}{30}$ .

$$\mathbb{P}(k \geq 3) = \frac{9 + 16}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}.$$

### 2 Tirage de deux boules



Il y a  $\binom{10}{2} = 45$  tirages équiprobables. Deux rouges :  $\binom{5}{2} = 10$  tirages, soit  $\frac{10}{45} = \frac{2}{9}$ .

Même couleur :  $10 + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} = 10 + 3 + 1 = 14$ , donc la probabilité vaut  $\frac{14}{45}$ .

### 3 Indépendance sur un dé



$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ ,  $\mathbb{P}(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ,  $A \cap B = \{4, 6\}$  donc  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$  :  $A$  et  $B$  sont indépendants.

$\mathbb{P}(D) = \frac{1}{2}$ ,  $A \cap D = \{4, 6\}$ ,  $\mathbb{P}(A \cap D) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D)$  :  $A$  et  $D$  ne sont pas indépendants.

### 4 Vrai ou faux sur une réunion



(a) Faux en général :  $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,8 - \mathbb{P}(A \cap B)$ , égal à 0,8 seulement si  $A$  et  $B$  sont incompatibles.

(b) Vrai :  $\mathbb{P}(A \cup B) \geq \mathbb{P}(B) = 0,5$  et, par sous-additivité,  $\leq 0,8$ .

(c) Vrai :  $A \cap B \subset A$ .

### 5 Espérance et variance d'une loi donnée



$$\mathbb{E}(X) = 0,4 + 0,6 + 0,6 = 1,6. \mathbb{E}(X^2) = 0,4 + 1,2 + 1,8 = 3,4.$$

$$\text{Var}(X) = 3,4 - 1,6^2 = 3,4 - 2,56 = 0,84.$$

### 6 Questionnaire au hasard



Les 12 réponses sont indépendantes et chacune est exacte avec la probabilité  $\frac{1}{4}$  :

$$X \sim \mathcal{B}(12, \frac{1}{4}).$$

$$\mathbb{E}(X) = 12 \times \frac{1}{4} = 3, \text{Var}(X) = 12 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}.$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^{12} \approx 0,032.$$

## 7 Une première borne de Markov



$X \geq 0$ , donc par Markov  $\mathbb{P}(X \geq 12) \leq \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ .

Par passage au complémentaire,  $\mathbb{P}(X < 12) \geq \frac{2}{3}$ .

## 8 Dépistage



Notons  $M$  « atteint » et  $T$  « test positif ». Par les probabilités totales :

$$\mathbb{P}(T) = 0,02 \times 0,95 + 0,98 \times 0,04 = 0,019 + 0,0392 = 0,0582.$$

Par Bayes :  $\mathbb{P}(M | T) = \frac{0,019}{0,0582} = \frac{95}{291} \approx 0,327$ . Moins d'un test positif sur trois correspond à une personne atteinte, car la maladie est rare.

## 9 Pile attendu



$X \sim \mathcal{G}(0,2)$ .  $\mathbb{P}(X = 3) = 0,2 \times 0,8^2 = 0,128$ .  $\mathbb{P}(X > 5) = 0,8^5 = 0,32768$  (cinq échecs de suite).  $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{0,2} = 5$ .

$$\mathbb{P}(X > 7 | X > 2) = \frac{0,8^7}{0,8^2} = 0,8^5 = 0,32768 : \text{absence de mémoire.}$$

## 10 Avis rares



$$\mathbb{P}(X = 0) = e^{-2,5} \approx 0,082. \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - e^{-2,5} \approx 0,918.$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = e^{-2,5} \frac{2,5^2}{2} = 3,125 e^{-2,5} \approx 0,257.$$

### 11 Deux à deux mais pas mutuellement



$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \text{ et } \mathbb{P}(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$ . Si  $A$  et  $C$  ont lieu, le premier est pair et la somme est paire donc le second est pair :  $A \cap C = A \cap B$ , de probabilité  $\frac{1}{4}$ . De même  $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}$ . Les produits valent  $\frac{1}{4}$  : indépendance deux à deux.

Mais  $A \cap B \cap C = A \cap B$  a pour probabilité  $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$  : pas mutuellement indépendants.

### 12 Fonction génératrice d'une loi



$$G(s) = \frac{1 + 3s + 3s^2 + s^3}{8}. \text{ Par unicité des coefficients : } \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8},$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8} : \text{c'est } \mathcal{B}(3, \frac{1}{2}).$$

$$G'(s) = \frac{3(1+s)^2}{8}, G'(1) = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}. G''(s) = \frac{6(1+s)}{8}, G''(1) = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Var}(X) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

### 13 Combinaison de variables indépendantes



$$\text{Linéarité : } \mathbb{E}(Z) = 3 \times 2 - 2 \times (-1) + 5 = 13.$$

$$\text{Indépendance : } \text{Var}(Z) = 3^2 \times 4 + (-2)^2 \times 9 = 36 + 36 = 72.$$

### 14 Combien de lancers ?



$$(a) \text{ Bienaymé-Tchebychev : } \mathbb{P}(|X - 120| \geq 10) \leq \frac{16}{100} = 0,16.$$

(b) Ici  $\sigma^2 = 0,3 \times 0,7 = 0,21$ . La loi faible donne

$$\mathbb{P}(|S_n/n - 0,3| \geq 0,05) \leq \frac{0,21}{n \times 0,0025} = \frac{84}{n}. \text{ Il suffit que } \frac{84}{n} \leq 0,1, \text{ soit } n \geq 840. \text{ Avec } n = 840 \text{ la probabilité cherchée est au moins } 0,9.$$

### 15 Minimum de deux temps d'attente

★★★★

$\{M > k\} = \{X > k\} \cap \{Y > k\}$ . Par indépendance,  $\mathbb{P}(M > k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^k = \left(\frac{4}{9}\right)^k$ .

Donc  $\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}(M > k-1) - \mathbb{P}(M > k) = \left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \times \frac{5}{9} : M \sim \mathcal{G}(5/9)$  et  $\mathbb{E}(M) = \frac{9}{5}$ .

### 16 Somme de deux lois de Poisson

★★★★

$G_X(s) = e^{1,5(s-1)}$ ,  $G_Y(s) = e^{2,5(s-1)}$ . Par indépendance,  $G_{X+Y}(s) = e^{4(s-1)}$ , qui est la fonction génératrice de  $\mathcal{P}(4)$ . L'unicité donne  $X + Y \sim \mathcal{P}(4)$ .

$$\mathbb{P}(X + Y = 3) = e^{-4} \frac{4^3}{3!} = \frac{32}{3} e^{-4} \approx 0,195.$$

### 17 Espérance par les queues

★★★★

(a)  $X = \sum_{k \geq 1} \mathbf{1}_{\{X \geq k\}}$  ; tous les termes sont positifs, on intervertit espérance et somme (théorème de Tonelli) :  $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k)$ .

(b)  $\mathbb{P}(\max \geq k) = 1 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^2$  pour  $1 \leq k \leq 6$ . Les valeurs sont  $\frac{36}{36}, \frac{35}{36}, \frac{32}{36}, \frac{27}{36}, \frac{20}{36}, \frac{11}{36}$ , de somme  $\frac{161}{36} \approx 4,47$ .

### 18 Points fixes d'une permutation

★★★★

Soit  $X = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_i$  où  $\mathbf{1}_i$  vaut 1 si  $i$  est fixe.  $\mathbb{P}(i \text{ fixe}) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$ , donc  $\mathbb{E}(X) = n \times \frac{1}{n} = 1$ .

Pour  $i \neq j$ ,  $\mathbb{P}(i, j \text{ fixes}) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$ , donc

$\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{n(n-1)} = 1$ . Ainsi  $\mathbb{E}(X^2) = 2$  et  $\text{Var}(X) = 2 - 1 = 1$ .

## 19 Un lemme de Borel-Cantelli

★★★★

L'événement « une infinité de  $A_n$  se réalisent » est  $\bigcap_N \bigcup_{n \geq N} A_n$ . Pour tout  $N \geq 2$ , par sous-additivité,  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq N} A_n\right) \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n \geq N} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{N-1}$ .

La suite  $\left(\bigcup_{n \geq N} A_n\right)_N$  est décroissante ; par continuité, la probabilité de l'intersection est la limite des  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq N} A_n\right)$ , toutes majorées par  $\frac{1}{N-1}$  qui tend vers 0 : elle est donc nulle. Le complémentaire est de probabilité 1.

## 20 Moments de la loi géométrique

★★★★

$$(a) G_X(s) = \sum_{k \geq 1} pq^{k-1}s^k = ps \sum_{j \geq 0} (qs)^j = \frac{ps}{1-qs}.$$

$$(b) G'_X(s) = \frac{p}{(1-qs)^2}, G'_X(1) = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}, G''_X(s) = \frac{2pq}{(1-qs)^3}, G''_X(1) = \frac{2q}{p^2}. \text{ Alors } \text{Var}(X) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q + p - 1}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

$$(c) \mathbb{E}(X) = 4 \text{ et } \text{Var}(X) = \frac{3/4}{1/16} = 12.$$

## 21 Amincissement d'une loi de Poisson

★★★★

Sachant  $N = n$ ,  $K \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$ , donc  $\mathbb{E}(s^K | N = n) = \left(\frac{2}{3} + \frac{s}{3}\right)^n$ .

Par probabilités totales,

$$G_K(s) = \sum_n \mathbb{P}(N = n) \left(\frac{2}{3} + \frac{s}{3}\right)^n = G_N\left(\frac{2}{3} + \frac{s}{3}\right) = e^{6\left(\frac{2}{3} + \frac{s}{3} - 1\right)} = e^{2(s-1)}.$$

C'est la fonction génératrice de  $\mathcal{P}(2)$ , donc  $K \sim \mathcal{P}(2)$  et  $\mathbb{P}(K = 0) = e^{-2} \approx 0,135$ .

## Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



## Entraîne-toi : défi express de Licence L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Probabilités sur un univers dénombrable  
: exercices de maths Licence L2



QCM de maths

Probabilités sur un univers dénombrable  
: QCM de maths Licence L2



### Contrôles de maths

Probabilités sur un univers dénombrable  
: contrôle de maths Licence L2



### Exercices de maths

Espaces vectoriels et applications  
linéaires : exercices de maths Licence L2



### Exercices de maths

Réduction des endomorphismes :  
exercices de maths Licence L2



### QCM de maths

Espaces vectoriels et applications  
linéaires : QCM de maths Licence L2

**Zyro vous emmène sur nos sites partenaires**

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage