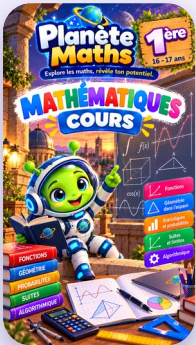


Probabilités conditionnelles et indépendance : cours de maths Terminale à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Savoir qu'un événement s'est déjà produit change souvent la probabilité d'un autre. Une alarme qui sonne rend un incendie bien plus probable, un ciel noir annonce la pluie. Dans ce chapitre, tu apprends à mesurer cet effet avec les probabilités conditionnelles, à organiser un raisonnement dans un arbre pondéré, à « remonter » des conséquences vers les causes, puis à reconnaître quand deux événements ne s'influencent pas du tout : ils sont indépendants.

1. Probabilité conditionnelle

D Définition

Soit A un événement de probabilité non nulle. La probabilité de B sachant A est

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

On la note aussi $P(B \mid A)$. On « restreint l'univers » à A et on mesure la part de B dans A .

La formule se retourne en la **formule des probabilités composées** : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. Elle permet de calculer une intersection quand on connaît une probabilité de départ et une probabilité conditionnelle.

P Propriétés

- P_A est une probabilité : $0 \leq P_A(B) \leq 1$ et $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$.
- En général $P_A(B) \neq P_B(A)$: l'ordre des événements compte.

E**Exemple 1 : un club sportif**

Un club compte 200 licenciés. Parmi eux, N = « pratique la natation » et E = « pratique l'escalade ». On connaît les effectifs :

	E	$\overline{E}$	Total
N	45	75	120
$\overline{N}$	45	35	80
Total	90	110	200

On choisit un licencié au hasard. $P(N) = \frac{120}{200} = 0,6$ et $P(N \cap E) = \frac{45}{200} = 0,225$.
. Donc

$P_N(E) = \frac{0,225}{0,6} = 0,375$ (c'est aussi $\frac{45}{120}$), alors que $P_E(N) = \frac{45}{90} = 0,5$. Les deux probabilités conditionnelles sont différentes.

2. Arbres pondérés

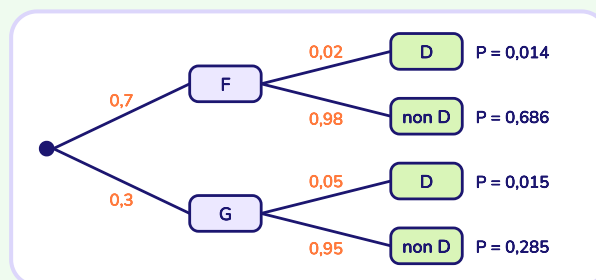
Un arbre pondéré résume une expérience en plusieurs étapes. Chaque branche porte une probabilité : la première étape donne des probabilités simples, la suivante des probabilités **conditionnelles** à l'étape précédente.

P**Règles de l'arbre**

- La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est le **produit** des probabilités de ses branches (formule des probabilités composées).
- La probabilité d'un événement est la **somme** des probabilités des chemins qui y mènent.

E**Exemple 2 : des plants à la jardinerie**

Une jardinerie reçoit 70 % de ses plants du fournisseur **F** et 30 % du fournisseur **G**. Un plant de **F** est défectueux (événement **D**) avec la probabilité **0,02**, un plant de **G** avec la probabilité **0,05**.



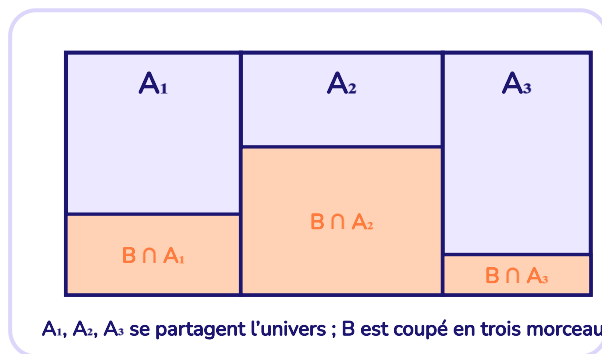
Le chemin **F** puis **D** a pour probabilité $0,7 \times 0,02 = 0,014$; le chemin **G** puis **D** a pour probabilité $0,3 \times 0,05 = 0,015$. Vérification :

$$0,014 + 0,686 + 0,015 + 0,285 = 1.$$

3. Partition et formule des probabilités totales

D Partition de l'univers

Des événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une **partition** de l'univers Ω s'ils sont de probabilité non nulle, deux à deux incompatibles ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) et si leur réunion est Ω . Pour tout événement A tel que $P(A) > 0$



P Formule des probabilités totales

Si $A_1, \dots, A_n$ forment une partition de Ω , alors pour tout événement B :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B).$$

Sur l'arbre, c'est exactement « additionner les chemins qui aboutissent à B ».

E Exemple 3 : probabilité d'un plant défectueux

Avec l'arbre de l'exemple 2, F et G forment une partition. Donc

$$P(D) = P(F)P_F(D) + P(G)P_G(D) = 0,014 + 0,015 = 0,029.$$

4. Formule de Bayes : remonter vers la cause

L'arbre donne les probabilités « de la cause vers l'effet ». On veut parfois l'inverse : sachant l'effet, quelle était la cause ? On écrit $P_B(A)$ à partir de $P_A(B)$.

P

Formule de Bayes

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$: $P_B(A) = \frac{P(A) P_A(B)}{P(B)}$, où $P(B)$ se calcule avec les probabilités totales.

E

Exemple 4 : retrouver le fournisseur

On tire un plant et on constate qu'il est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il vienne de G ?

$$P_D(G) = \frac{P(G \cap D)}{P(D)} = \frac{0,015}{0,029} = \frac{15}{29} \approx 0,517.$$

Alors que G ne fournit que 30 % des plants, il est responsable de plus de la moitié des défauts.



Attention

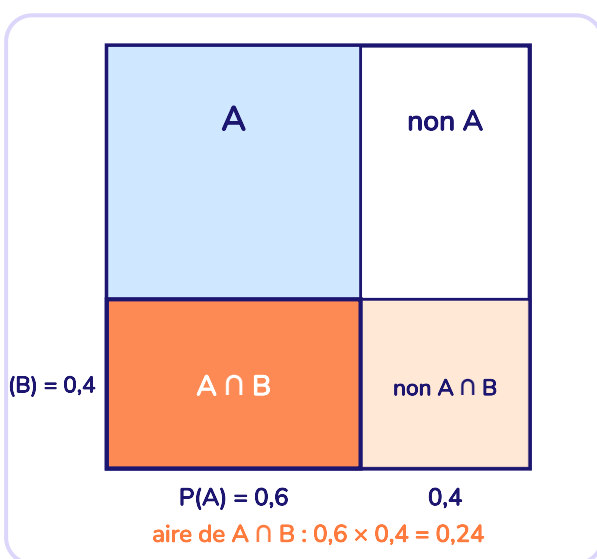
Ne confonds pas $P_A(B)$ et $P_B(A)$. Ici $P_G(D) = 0,05$ (un plant de G est défectueux), mais $P_D(G) \approx 0,517$ (un plant défectueux vient de G). Ce ne sont pas les mêmes questions.

5. Événements indépendants

D Définition

Deux événements A et B sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Si $P(A) \neq 0$, cela revient à $P_A(B) = P(B)$: savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité de B .



P Propriétés

- Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et B , $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.
- Pour tester l'indépendance, on compare $P(A \cap B)$ et $P(A)P(B)$.



Attention

« Incompatibles » et « indépendants » sont deux notions très différentes. Si A et B sont incompatibles et de probabilités non nulles, alors $P(A \cap B) = 0$ alors que $P(A)P(B) > 0$: ils ne sont **pas** indépendants. Deux événements incompatibles se gênent au contraire complètement.



Zyro, l'explorateur extraterrestre, te souffle

Sur la Terre, il y a un truc pour tester l'indépendance : si la probabilité conditionnelle est la même que la probabilité simple, c'est qu'aucun des deux événements ne dit rien de l'autre.

6. Répétition d'épreuves indépendantes

Quand on répète une expérience dans les mêmes conditions et sans que les résultats s'influencent (lancers de pièces, tirs avec remise, appels successifs), les épreuves sont **indépendantes** : la probabilité d'une suite de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.



Méthode : « au moins un succès »

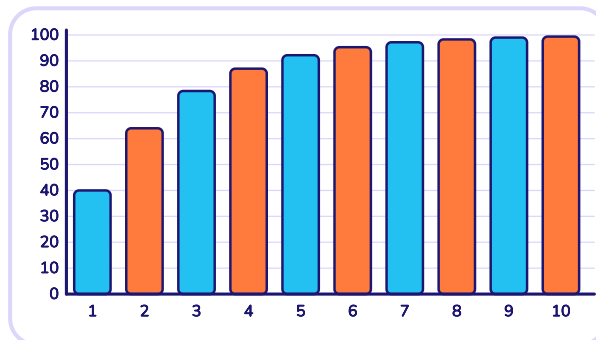
1. Note p la probabilité d'un succès et $q = 1 - p$ celle d'un échec.
2. Pour n épreuves indépendantes, la probabilité de n'avoir que des échecs est q^n .
3. L'événement contraire donne : $P(\text{au moins un succès}) = 1 - q^n$.
4. Pour trouver le plus petit n tel que $1 - q^n \geq s$, résous $q^n \leq 1 - s$ avec la fonction logarithme ou par essais à la calculatrice.

E

Exemple 5 : les fléchettes

Un joueur atteint la cible avec la probabilité **0,3** à chaque lancer et lance 5 fléchettes indépendamment. La probabilité de manquer les 5 fois est $0,7^5 = 0,16807$. La probabilité d'atteindre la cible au moins une fois est donc $1 - 0,16807 = 0,83193$, soit environ **83,2 %**.

Plus on répète, plus la probabilité de réussir au moins une fois se rapproche de 1, sans jamais l'atteindre :



À retenir

- $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ et $P(A \cap B) = P(A) P_A(B)$; en général $P_A(B) \neq P_B(A)$.
- Dans un arbre pondéré : somme égale à 1 à chaque nœud, produit le long d'un chemin, somme sur les chemins qui mènent à l'événement.
- Probabilités totales : $P(B) = \sum P(A_i) P_{A_i}(B)$ pour une partition (A_i) .
- Bayes : $P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$.
- A et B indépendants $\iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$; des événements incompatibles de probabilités non nulles ne sont jamais indépendants.
- Répétition indépendante : on multiplie ; $P(\text{au moins un succès}) = 1 - q^n$.

Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Terminale

Changer de niveau

Niveau : **Terminale**

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Probabilités conditionnelles et indépendance : exercices de maths Terminale



Contrôles de maths

Probabilités conditionnelles et indépendance : contrôle de maths Terminale

 QCM de maths

Probabilités conditionnelles et
indépendance : QCM de maths Terminale

 Exercices de maths

Variables aléatoires et loi binomiale :
exercices de maths Terminale

 Exercices de maths

Suites numériques et récurrence :
exercices de maths Terminale

 Contrôles de maths

Variables aléatoires et loi binomiale :
contrôle de maths Terminale

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage