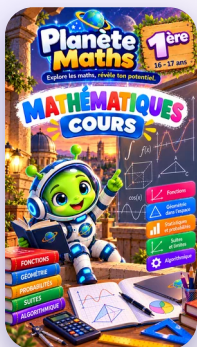


Primitives et équations différentielles : cours de maths Terminale à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Dériver, tu sais le faire : on passe d'une fonction à sa pente. Dans ce chapitre, on remonte le chemin. Connaissant la **vitesse** d'un mobile, comment retrouver sa **position** ? Connaissant la **vitesse de refroidissement** d'une tasse de thé, comment prévoir sa température dans vingt minutes ? Les primitives et les équations différentielles répondent à ces questions, et elles servent partout : physique, biologie, économie.

1. Primitive d'une fonction

D Primitive

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Une **primitive** de f sur I est une fonction F , dérivable sur I , telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout x de I .

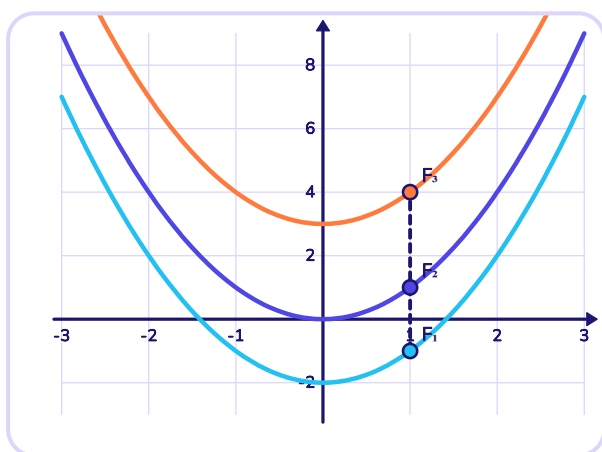
Par exemple, $F(x) = x^2$ est une primitive de $f(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}$, mais $x^2 - 2$ et $x^2 + 3$ aussi : une constante disparaît quand on dérive. Il n'y a donc pas *une* primitive, mais toute une famille.

P

Ensemble des primitives

Si f est **continue** sur un intervalle I , alors f admet des primitives sur I . Si F est l'une d'elles, les primitives de f sur I sont exactement les fonctions $x \mapsto F(x) + c$, où c est un réel quelconque.

De plus, pour tous réels x_0 dans I et y_0 , il existe **une seule** primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$.



Sur la figure, les trois courbes se déduisent l'une de l'autre par une translation verticale : en $x = 1$, toutes ont la même pente $f(1) = 2$, mais elles passent par des points différents F_1, F_2, F_3 . Fixer la valeur en un point (une **condition initiale**) sélectionne une seule courbe.



Piège

N'oublie jamais le « $+c$ » quand tu demandes *toutes* les primitives. En revanche, quand l'énoncé impose une valeur en un point, tu dois déterminer c et donner une seule fonction.

2. Primitives usuelles

Lire le tableau des dérivées « de droite à gauche » donne les primitives des fonctions de référence.

Fonction f	Une primitive F	Sur l'intervalle
k (constante)	kx	$\mathbb{R}$
x^n, n entier, $n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$, sinon $]0; +\infty[$ ou $] -\infty; 0[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$

La linéarité de la dérivation s'étend : si F et G sont des primitives de f et g , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$, et kF est une primitive de kf .

E

Exemple 1

Primitives de $f(x) = 4x^3 - 6x + 5 + 2e^x$ sur $\mathbb{R}$.

On primitive terme à terme :

$$F(x) = 4 \times \frac{x^4}{4} - 6 \times \frac{x^2}{2} + 5x + 2e^x + c = x^4 - 3x^2 + 5x + 2e^x + c.$$

3. Primitives de formes composées

La dérivée d'une fonction composée fait apparaître un facteur u' . En lisant ces formules à l'envers, on obtient les primitives suivantes, où u est une fonction dérivable.

Forme de f	Une primitive F	Condition
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	$n \neq -1$ (et $u \neq 0$ si $n < 0$)
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	$u \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	$u > 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	$u > 0$
$u'e^u$	e^u	aucune
$u' \cos u$	$\sin u$	aucune
$u' \sin u$	$-\cos u$	aucune

Cas particulier très utile : si $a \neq 0$ et si F est une primitive de f , alors $x \mapsto \frac{1}{a}F(ax + b)$ est une primitive de $x \mapsto f(ax + b)$. Ainsi e^{3x-1} a pour primitive $\frac{1}{3}e^{3x-1}$.

M

Méthode : reconnaître la forme

1. Repère une fonction « intérieure » $u(x)$ (ce qui est élevé à une puissance, sous une racine, au dénominateur, dans l'exponentielle).
2. Calcule $u'(x)$ et regarde si elle apparaît en facteur dans f .
3. S'il manque seulement une constante, ajuste-la : on multiplie et on divise par la même valeur.
4. Vérifie en dérivant ta primitive.

E

Exemple 2

Primitive de $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 3}$ sur $\mathbb{R}$.

Posons $u(x) = x^2 + 3$, alors $u'(x) = 2x$ et $u > 0$. Donc $f = 2 \times \frac{u'}{u}$, et une primitive est $F(x) = 2 \ln(x^2 + 3)$.

!

Astuce de Zyro

Sur ma planète, on contrôle toujours une primitive en la dérivant : si tu retrouves f , tu es sûr de ton résultat. Ça prend dix secondes et ça évite les erreurs de facteur !

4. L'équation différentielle $y' = ay$

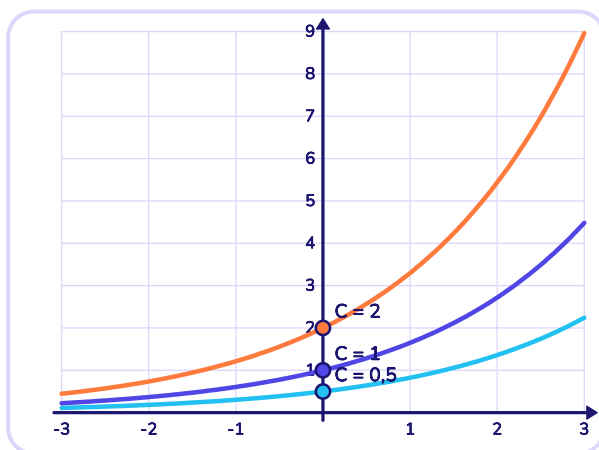
D Équation différentielle

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une **fonction y** et dans laquelle figure sa dérivée **y'** . Une **solution** est une fonction dérivable qui vérifie l'égalité pour tout x de l'intervalle d'étude.

P Théorème

Soit a un réel. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = ay$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle.

Démonstration. Les fonctions Ce^{ax} conviennent : leur dérivée est aCe^{ax} . Réciproquement, soit f une solution et $g(x) = f(x)e^{-ax}$. Alors
 $g'(x) = f'(x)e^{-ax} - af(x)e^{-ax} = (f'(x) - af(x))e^{-ax} = 0$. La fonction g est constante, égale à un réel C , donc $f(x) = Ce^{ax}$.



La figure montre les solutions de $y' = 0,5y$: plus on part haut, plus la courbe est haute. Elles ne se croisent jamais.

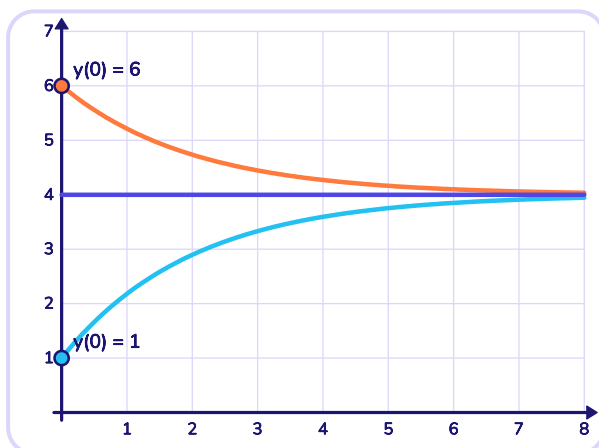
5. L'équation différentielle $y' = ay + b$

Quand on ajoute un terme constant b , on cherche d'abord une solution constante : si $y = k$, alors $y' = 0$, donc $0 = ak + b$ et $k = -\frac{b}{a}$ (avec $a \neq 0$).

P Théorème

Soit $a \neq 0$ et b deux réels. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + b$ sont les fonctions $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où C est un réel quelconque.

En effet, y est solution si et seulement si $z = y + \frac{b}{a}$ vérifie $z' = az$, ce qui ramène au cas précédent.



Si $a < 0$, toutes les solutions se rapprochent de la solution constante $-\frac{b}{a}$ quand $x \rightarrow +\infty$: c'est un **état d'équilibre** stable, comme sur la figure où l'équilibre vaut 4.

E**Exemple 3**

Résous $y' = -2y + 10$.

Ici $a = -2$ et $b = 10$, donc $-\frac{b}{a} = 5$. Les solutions sont $y(x) = Ce^{-2x} + 5$, avec $C \in \mathbb{R}$.

6. Condition initiale

Une équation différentielle a une infinité de solutions. Une condition du type $y(x_0) = y_0$ permet d'en choisir une seule.

P**Existence et unicité**

Pour a, b, x_0 et y_0 donnés, l'équation $y' = ay + b$ admet une **unique** solution vérifiant $y(x_0) = y_0$.

M**Méthode**

1. Écris la forme générale des solutions avec la constante C .
2. Remplace x par x_0 et y par y_0 pour obtenir une équation en C .
3. Résous-la, puis écris la solution complète.
4. Vérifie la condition initiale et l'équation.

E**Exemple 4**

Solution de $y' = 3y - 12$ vérifiant $y(0) = 1$.

Forme générale : $y(x) = Ce^{3x} + 4$ car $-\frac{b}{a} = \frac{12}{3} = 4$. La condition $y(0) = 1$ donne $C + 4 = 1$, donc $C = -3$. La solution est $y(x) = -3e^{3x} + 4$.

7. Modèles d'évolution

Quand la vitesse de variation d'une grandeur est proportionnelle à cette grandeur (éventuellement à un écart près), on obtient une équation différentielle.

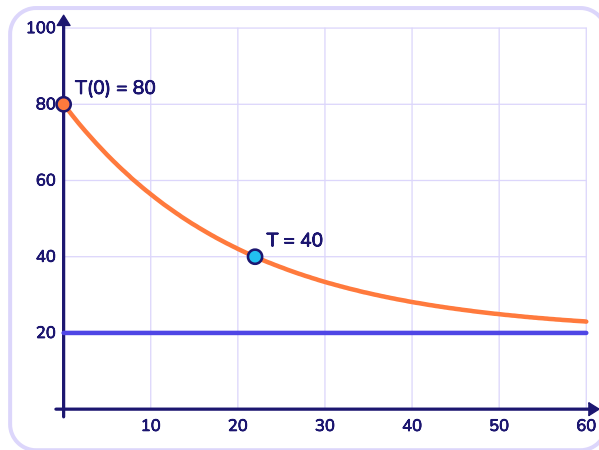
- **Décroissance radioactive** : $N' = -\lambda N$, donc $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$; la **demi-vie** $t_{1/2}$ vérifie $e^{-\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2}$, soit $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.
- **Croissance exponentielle** d'une population sans contrainte : $P' = kP$ avec $k > 0$.
- **Refroidissement** (loi de Newton) : $T' = -k(T - T_{\text{ext}})$, soit $T' = -kT + kT_{\text{ext}}$.

E**Exemple 5 : une tasse de thé**

Un thé à 80°C est servi dans une pièce à 20°C . La température T (en $^\circ\text{C}$) au bout de t minutes vérifie $T' = -0,05(T - 20) = -0,05T + 1$, avec $T(0) = 80$.

Ici $-\frac{b}{a} = \frac{1}{0,05} = 20$, donc $T(t) = Ce^{-0,05t} + 20$ et $T(0) = 80$ donne $C = 60$:
 $T(t) = 20 + 60e^{-0,05t}$.

Le thé atteint 40°C quand $60e^{-0,05t} = 20$, soit $e^{-0,05t} = \frac{1}{3}$, donc $t = 20 \ln 3 \approx 22$ minutes.



Piège

Dans $y' = ay + b$, le réel a est le coefficient de y , pas celui de y' . Si l'équation est donnée sous la forme $2y' = 6y - 4$, divise d'abord par 2 pour obtenir $y' = 3y - 2$.

À retenir

- F est une primitive de f si $F' = f$; deux primitives diffèrent d'une **constante**.
- Une condition $F(x_0) = y_0$ détermine **une seule** primitive.
- Les formes composées : $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $u'e^u$ ont pour primitives $\frac{u^{n+1}}{n+1}$, $\ln u$, $2\sqrt{u}$, e^u .
- $y' = ay$ a pour solutions Ce^{ax} .
- $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) a pour solutions $Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.
- Avec $y(x_0) = y_0$, la constante C est unique : on la calcule puis on vérifie.
- Modèles : décroissance radioactive, croissance de population, refroidissement de Newton.

Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Terminale

Changer de niveau

Niveau : **Terminale**

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Primitives et équations différentielles :
exercices de maths Terminale



Contrôles de maths

Primitives et équations différentielles :
contrôle de maths Terminale

 QCM de maths

Primitives et équations différentielles :
QCM de maths Terminale

 Exercices de maths

Calcul intégral : exercices de maths
Terminale

 Exercices de maths

Fonctions trigonométriques : exercices
de maths Terminale

 Contrôles de maths

Calcul intégral : contrôle de maths
Terminale

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage