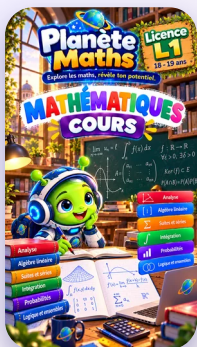


Nombres réels et suites : cours de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Toute l'analyse repose sur une propriété qui distingue $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$: l'existence de bornes supérieures. Ce chapitre construit, à partir d'elle, les outils qui permettent de prouver qu'une suite converge sans connaître sa limite : monotonie, suites adjacentes, théorème de Bolzano-Weierstrass, suites de Cauchy. Chaque résultat est démontré ou esquissé, puis employé sur des exemples calculés.

1. Ordre et valeur absolue

L'ensemble $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné : on peut additionner, multiplier, diviser par un réel non nul, et comparer deux réels quelconques. La **valeur absolue** de x est $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ sinon. Elle mesure une distance : $|x - y|$ est la distance entre x et y sur la droite réelle.

P**Propriétés de la valeur absolue**

- $|xy| = |x| |y|$ et $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$;
- inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- seconde forme : $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

E**Exemple 1 : une inéquation**

Réolvons $|3x + 1| < 7$. On a $-7 < 3x + 1 < 7$, donc $-8 < 3x < 6$ et $-\frac{8}{3} < x < 2$. L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left] -\frac{8}{3} ; 2 \right[$.

2. Borne supérieure**D****Majorant, maximum, borne supérieure**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Un réel M est un **majorant** de A si $a \leq M$ pour tout $a \in A$. Si de plus $M \in A$, c'est le **maximum** de A . La **borne supérieure** $\sup A$ est, quand elle existe, le plus petit des majorants. On définit de même minorant, minimum et borne inférieure $\inf A$.

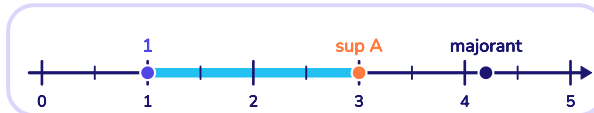
P**Axiome de la borne supérieure**

Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure. Toute partie non vide et minorée admet une borne inférieure.

P

Caractérisation par ε

Un réel M est la borne supérieure de A si et seulement si M majore A et si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ tel que $M - \varepsilon < a$.



E

Exemple 2 : une borne supérieure non atteinte

Soit $A = \left\{ 2 - \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Le réel 2 majore A car $\frac{1}{n} > 0$. Soit $\varepsilon > 0$: en prenant un entier $n > \frac{1}{\varepsilon}$, on a $2 - \frac{1}{n} > 2 - \varepsilon$. Donc $\sup A = 2$. Ce n'est pas un maximum, puisque $2 - \frac{1}{n} < 2$ pour tout n . En revanche $\min A = 1$, atteint pour $n = 1$.

A

Attention

La borne supérieure n'appartient pas toujours à l'ensemble. Et l'axiome est faux dans $\mathbb{Q}$: la partie $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ est majorée dans $\mathbb{Q}$ mais n'a pas de plus petit majorant rationnel, car ce plus petit majorant serait $\sqrt{2}$.

3. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Une conséquence directe de l'axiome est la **propriété d'Archimède** : pour tout réel x , il existe un entier naturel $n > x$. Elle permet de définir la **partie entière** $[x]$, unique entier k vérifiant $k \leq x < k + 1$. Par exemple $[-1,5] = -2$.

P Densité

Entre deux réels $a < b$ il existe toujours un rationnel, et aussi un irrationnel.

Démonstration. Choisissons un entier $n > \frac{1}{b-a}$, de sorte que $nb - na > 1$. Posons $k = \lfloor na \rfloor + 1$. Alors $na < k \leq na + 1 < nb$, donc $a < \frac{k}{n} < b$. Pour l'irrationnel, on applique ce résultat à $\frac{a}{\sqrt{2}}$ et $\frac{b}{\sqrt{2}}$ pour trouver un rationnel r entre eux, non nul (si l'intervalle contient 0, on en prend un autre, il y en a une infinité) : $r\sqrt{2}$ est irrationnel et se trouve entre a et b .

E Exemple 3 : un rationnel intercalé

Cherchons un rationnel entre $\frac{5}{7}$ et $\frac{3}{4}$. On a $b - a = \frac{1}{28}$, donc on prend $n = 29 > 28$. Comme $29 \times \frac{5}{7} = \frac{145}{7} \approx 20,71$, on pose $k = 21$. Le rationnel $\frac{21}{29}$ convient : $\frac{5}{7} < \frac{21}{29} < \frac{3}{4}$ car $147 > 145$ et $84 < 87$.

4. Limite d'une suite

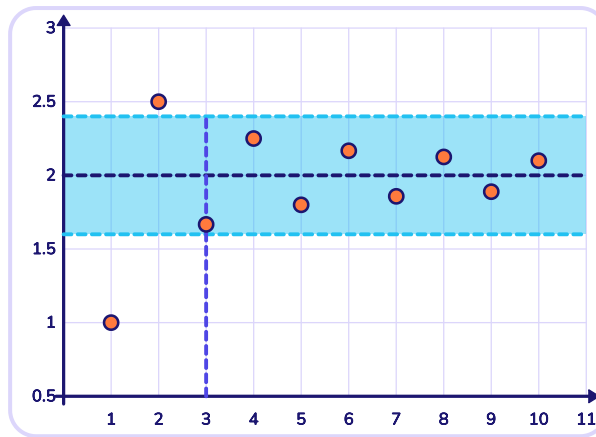
D Suite convergente

Une suite réelle (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Le rang N dépend de ε : plus ε est petit, plus N est grand en général.

Géométriquement, à partir du rang N , tous les points $(n; u_n)$ sont dans la bande de hauteur 2ε centrée sur ℓ .



P

Premiers théorèmes

- La limite, si elle existe, est unique.
- Toute suite convergente est bornée.
- Les limites passent aux sommes, produits et quotients (dénominateur de limite non nulle).
- Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $u_n \rightarrow \ell$, $v_n \rightarrow \ell'$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Théorème d'encadrement : si $u_n \leq w_n \leq v_n$ et si u_n et v_n tendent vers la même limite ℓ , alors $w_n \rightarrow \ell$.

E

Exemple 4 : appliquer la définition

Montrons que $u_n = \frac{4n+3}{n+1}$ converge vers 4. On a $|u_n - 4| = \frac{1}{n+1}$. Soit $\varepsilon > 0$: la condition $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ équivaut à $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Il suffit donc de prendre N entier supérieur à $\frac{1}{\varepsilon}$; pour $\varepsilon = 0,01$, $N = 101$ convient.

M**Méthode : prouver une limite avec ε**

1. Calculer et simplifier $|u_n - \ell|$.
2. Majorer cette quantité par une expression simple qui tend vers 0 (par exemple $\frac{c}{n}$).
3. Résoudre l'inégalité obtenue pour exhiber un rang N qui ne dépend que de ε .

5. Suites monotones**P****Théorème de la limite monotone**

Toute suite croissante et majorée converge, vers $\sup\{u_n ; n \in \mathbb{N}\}$. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. Énoncé symétrique pour les suites décroissantes (minorées : convergence vers l'inf).

Démonstration. Soit $\ell = \sup\{u_n\}$, qui existe par l'axiome. Pour $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que $u_N > \ell - \varepsilon$. Pour $n \geq N$, la croissance donne $\ell - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \ell$, donc $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

E**Exemple 5 : convergence sans connaître la limite**

Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$. La suite est croissante, car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. Pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. La somme télescope :
 $u_n \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 2$. Majorée et croissante, (u_n) converge.

6. Suites adjacentes

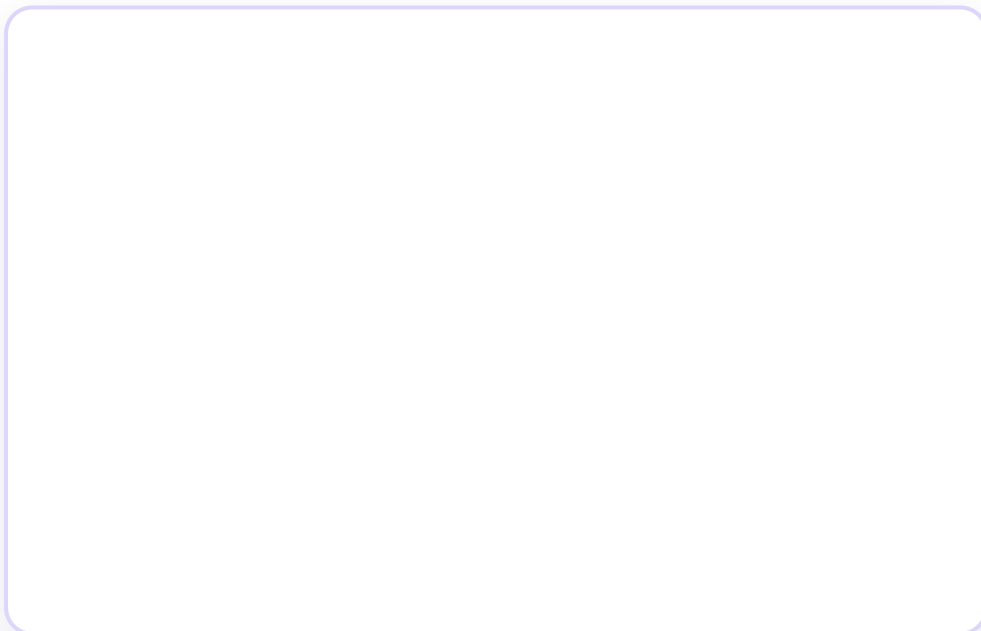
D Suites adjacentes

Deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $v_n - u_n \rightarrow 0$.

P Théorème

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite ℓ , et $u_n \leq \ell \leq v_n$ pour tout n .

Démonstration. La suite $(v_n - u_n)$ est décroissante de limite nulle, donc positive. Ainsi $u_n \leq v_n \leq v_0$: (u_n) est croissante majorée et converge. De même (v_n) est décroissante minorée par u_0 et converge. La différence tend vers 0, donc les deux limites sont égales.



Nombres réels et suites : graphique de deux suites adjacentes, la suite u_n croissante en violet et v_n décroissante en orange, qui encadrent leur limite commune

E

Exemple 6 : un encadrement fourni gratuitement

Posons $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. On sait que (u_n) croît. De plus

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0,$$

et $v_n - u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$. Les suites sont adjacentes. Pour $n = 10$, on obtient $1,549 < \ell < 1,650$.

7. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Une **sous-suite** (ou suite extraite) de (u_n) est une suite $(u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante. Si $u_n \rightarrow \ell$, toute sous-suite tend aussi vers ℓ . Par contraposée, deux sous-suites de limites différentes prouvent qu'une suite diverge.

P

Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Idée de la démonstration (dichotomie). Tous les termes sont dans un segment $[a_0, b_0]$. On le coupe en deux moitiés : l'une contient une infinité de termes ; on la garde et on la nomme $[a_1, b_1]$. En répétant, on obtient des segments emboîtés de longueur $\frac{b_0 - a_0}{2^n}$. Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes, de limite commune ℓ . On choisit des rangs $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots$ avec $u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$, puis l'encadrement donne $u_{\varphi(n)} \rightarrow \ell$.

E**Exemple 7 : une suite bornée divergente**

Soit $u_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$. Elle est bornée par 1. Les termes pairs $u_{2p} = \frac{2p}{2p+1}$ tendent vers 1, les termes impairs $u_{2p+1} = -\frac{2p+1}{2p+2}$ tendent vers -1 . Deux sous-suites aux limites distinctes : (u_n) diverge, bien que Bolzano-Weierstrass s'applique.

8. Suites de Cauchy**D****Suite de Cauchy**

Une suite (u_n) est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Les termes finissent par être tous proches *les uns des autres*, sans qu'on nomme de limite.

P**Théorème de complétude**

Dans $\mathbb{R}$, une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Démonstration. Si $u_n \rightarrow \ell$, on prend N tel que $|u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geq N$, puis

$|u_p - u_q| \leq |u_p - \ell| + |\ell - u_q| < \varepsilon$. Réciproquement, une suite de Cauchy est bornée (prendre $\varepsilon = 1$) ; par Bolzano-Weierstrass une sous-suite converge vers ℓ , et la condition de Cauchy force toute la suite à tendre vers ℓ .

E**Exemple 8 : une suite qui n'est pas de Cauchy**

Soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Alors $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$. La condition de Cauchy échoue pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$: (H_n) diverge, alors que ses termes successifs s'écartent de moins en moins.

**Attention**

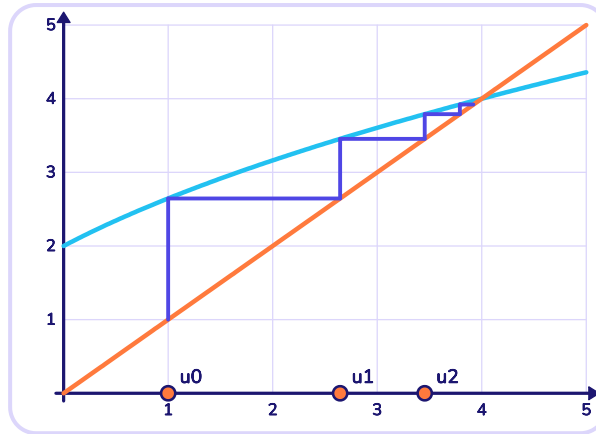
Il ne suffit pas que $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$: c'est le cas de (H_n) , pourtant divergente. La condition de Cauchy porte sur *tous* les couples (p, q) .

9. Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

M**Méthode : étudier une suite récurrente**

1. Trouver un intervalle I contenant u_0 et stable : $f(I) \subset I$. On montre alors par récurrence que $u_n \in I$.
2. Si f est croissante sur I , la suite est monotone : croissante si $u_1 \geq u_0$, décroissante sinon. Si f est décroissante, ce sont les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) qui sont monotones, de sens contraires.
3. Une suite monotone bornée converge. Si f est continue, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$ (point fixe) ; on retient celui qui est dans I et compatible avec le sens de variation.

Si $u_n \rightarrow \ell$ et si f est continue en ℓ , alors $u_{n+1} = f(u_n)$ tend à la fois vers ℓ et vers $f(\ell)$: par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$. Ce n'est qu'une condition nécessaire : il faut d'abord prouver la convergence.



E Exemple 9 : un escalier vers le point fixe

Soit $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. L'intervalle $[0; 4]$ est stable car $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ est croissante et $f(4) = 4$. Sur $[0; 4]$, $u_{n+1} \geq u_n$ équivaut à $3u_n + 4 \geq u_n^2$, soit $(4 - u_n)(u_n + 1) \geq 0$, ce qui est vrai. La suite est croissante et majorée : elle converge vers ℓ tel que $\ell^2 - 3\ell - 4 = 0$, donc $\ell = 4$ (l'autre racine, -1 , est négative). Numériquement, $u_1 \approx 2,646$, $u_2 \approx 3,455$, $u_3 \approx 3,790$.

! Astuce de Zyro

Sur la Terre, mes amis dessinent la droite $y = x$ pour lire les suites récurrentes : chaque marche de l'escalier est un terme de plus. Le point fixe se voit là où la courbe croise la droite.

À retenir

- Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure ; $M = \sup A$ si M majore A et si $M - \varepsilon$ ne majore plus.
- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, ainsi que les irrationnels.
- $u_n \rightarrow \ell$ signifie : $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$.
- Une suite monotone et bornée converge ; deux suites adjacentes ont la même limite et l'encadrent.
- Toute suite bornée a une sous-suite convergente ; deux sous-suites aux limites distinctes prouvent la divergence.
- Dans $\mathbb{R}$, converger équivaut à être de Cauchy.
- Pour $u_{n+1} = f(u_n)$: intervalle stable, monotonie, puis point fixe $f(\ell) = \ell$.

Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Nombres réels et suites : exercices de maths Licence L1

 Contrôles de maths

Nombres réels et suites : contrôle de maths Licence L1

 QCM de maths

Nombres réels et suites : QCM de maths Licence L1

 Exercices de maths

Limites et continuité : exercices de maths Licence L1

 Exercices de maths

Dérivation et formules de Taylor : exercices de maths Licence L1

 Contrôles de maths

Limites et continuité : contrôle de maths Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage