

Nombres réels et suites : exercices corrigés de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Une inéquation avec valeur absolue



a) $|2x - 3| < 5 \iff -5 < 2x - 3 < 5 \iff -2 < 2x < 8 \iff -1 < x < 4.$

Solutions : $] -1 ; 4[.$

b) $|x + 1| \geq 3 \iff x + 1 \geq 3 \text{ ou } x + 1 \leq -3, \text{ soit } x \geq 2 \text{ ou } x \leq -4. \text{ Solutions :}$

$] -\infty ; -4] \cup [2 ; +\infty[.$

2 Borne supérieure d'une suite de fractions



Les premiers éléments sont $0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}$.

On écrit $\frac{n}{n+2} = 1 - \frac{2}{n+2}$. Cette quantité est strictement croissante en n et strictement inférieure à 1 : le minimum est 0 (atteint pour $n = 0$), donc $\inf A = \min A = 0$.

Le réel 1 majore A . Pour $\varepsilon > 0$, si $n + 2 > \frac{2}{\varepsilon}$, alors $1 - \frac{2}{n+2} > 1 - \varepsilon$. Donc $\sup A = 1$, non atteint puisque $\frac{2}{n+2} > 0$.

3 Parties entières



La partie entière est l'entier k tel que $k \leq x < k + 1$.

$-3 \leq -2,7 < -2$ donc $\lfloor -2,7 \rfloor = -3$. Ensuite $\lfloor 5 \rfloor = 5$. Comme $7^2 = 49 \leq 50 < 64 = 8^2$, $\lfloor \sqrt{50} \rfloor = 7$. Puis $-4 \leq -\pi \approx -3,14 < -3$ donne $\lfloor -\pi \rfloor = -4$. Enfin $\frac{17}{5} = 3,4$ et $\left\lfloor \frac{17}{5} \right\rfloor = 3$.

4 Un rang pour une précision donnée



a) $u_n - 3 = \frac{3n + 1 - 3n - 6}{n + 2} = -\frac{5}{n + 2}$, donc $|u_n - 3| = \frac{5}{n + 2}$. Pour $\varepsilon > 0$, $\frac{5}{n + 2} < \varepsilon$ dès que $n > \frac{5}{\varepsilon} - 2$: le rang N existe, donc $u_n \rightarrow 3$.

b) On veut $\frac{5}{n + 2} < 0,01$, soit $n + 2 > 500$, donc $n \geq 499$. Pour $n = 498$, $\frac{5}{500} = 0,01$ n'est pas strictement inférieur. Le plus petit rang est $N = 499$.

5 Vrai ou faux sur les suites



- a) **Faux** : $u_n = (-1)^n$ est bornée mais diverge (sous-suites de limites **1** et **-1**).
- b) **Vrai** : à partir d'un rang N , $|u_n - \ell| < 1$, donc $|u_n| < |\ell| + 1$; il reste un nombre fini de termes avant N .
- c) **Vrai** : pour tout A , le réel A ne majore pas la suite, donc un terme dépasse A et, par croissance, tous les suivants aussi.
- d) **Faux** : $u_n = (-1)^n$ a pour carré la suite constante 1, qui converge.

6 Monotonie de n sur 2 puissance n



- a) $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{3}{8}$.
- b) Pour $n \geq 1$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n} \leq 1$ car $n+1 \leq 2n$. La suite est donc décroissante à partir du rang 1.
- c) Décroissante et minorée par 0, elle converge vers ℓ . Dans $u_{n+1} = u_n \times \frac{n+1}{2n}$, le facteur tend vers $\frac{1}{2}$, d'où $\ell = \frac{\ell}{2}$ et $\ell = 0$.

7 Un décimal près d'un irrationnel



On a $\sqrt{2} \approx 1,41421$ et $\sqrt{2} + 0,001 \approx 1,41521$. Le décimal **1,4143** convient.

Justification : $1,4143^2 = 2,00024449 > 2$, donc $1,4143 > \sqrt{2}$; et

$1,4143 < 1,41521 < \sqrt{2} + 0,001$. Ce décimal est un rationnel : on illustre la densité de $\mathbb{Q}$.

8

Ensemble défini par une inégalité du second degré

★★★

a) $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$, négatif exactement pour $1 < x < 3$. Donc $A =]1; 3[$, $\sup A = 3$ et $\inf A = 1$, ni l'un ni l'autre atteint, car A est ouvert.

b) Pour $x > 0$, $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$, donc 2 minore C ; pour $x = 1$ on trouve 2 : c'est le minimum, $\inf C = 2$. Enfin $x + \frac{1}{x} \geq x$ peut dépasser tout réel, donc C n'est pas majorée.

9

Caractérisation par epsilon

★★★

a) $2 - \frac{7}{n+3} = \frac{2n+6-7}{n+3} = \frac{2n-1}{n+3}$.

b) Le réel 2 majore A . Pour $\varepsilon > 0$, $u_n > 2 - \varepsilon$ dès que $n+3 > \frac{7}{\varepsilon}$; donc $\sup A = 2$. La suite est croissante, le minimum est $u_0 = -\frac{1}{3}$.

c) On veut $\frac{7}{n+3} < 0,001$, soit $n+3 > 7000$, donc $n \geq 6998$. Pour $n = 6997$, $\frac{7}{7000} = 0,001$ exactement : insuffisant. Le plus petit rang est 6998.

10

Somme de deux parties

★★★

a) Comme dans l'exemple du cours, $\sup A = 1$ et $\sup B = 5$.

b) Un élément de $A + B$ s'écrit $6 - \frac{1}{n} - \frac{2}{m} < 6$: 6 est un majorant. Pour $\varepsilon > 0$, choisissons $n > \frac{2}{\varepsilon}$ et $m > \frac{4}{\varepsilon}$; alors $\frac{1}{n} + \frac{2}{m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Donc $\sup(A + B) = 6 = \sup A + \sup B$.

c) Pour $\varepsilon = 0,01$: $n = 201$ et $m = 401$. Alors

$$\frac{1}{201} + \frac{2}{401} \approx 0,00498 + 0,00499 = 0,00996 < 0,01.$$

11 Limite par encadrement



Comme $-1 \leq \sin n \leq 1$, on a $\frac{n-1}{2n+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{2n+1}$.

En divisant par n , $\frac{n-1}{2n+1} = \frac{1-1/n}{2+1/n} \rightarrow \frac{1}{2}$, et de même $\frac{n+1}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2}$. Par encadrement, $u_n \rightarrow \frac{1}{2}$.

12 Limite d'un quotient de puissances



On divise numérateur et dénominateur par 5^n : $u_n = \frac{(2/5)^n + 1}{1 - (3/5)^n}$.

Comme $0 < \frac{2}{5} < 1$ et $0 < \frac{3}{5} < 1$, $\left(\frac{2}{5}\right)^n \rightarrow 0$ et $\left(\frac{3}{5}\right)^n \rightarrow 0$. Par quotient, $u_n \rightarrow \frac{0+1}{1-0} = 1$.

13 Adjacentes avec des cubes



a) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3} > 0$: (u_n) croît. Ensuite

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} = \frac{n+2}{(n+1)^3} - \frac{1}{n^2}. \text{ Or }$$

$n^2(n+2) = n^3 + 2n^2 < n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3$, donc $v_{n+1} - v_n < 0$. Enfin

$$v_n - u_n = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0.$$

b) On calcule $u_{10} \approx 1,1975$ et $v_{10} = u_{10} + 0,01 \approx 1,2075$. Donc $1,197 < \ell < 1,208$.

14 Valeurs limites d'une suite bornée



a) Pour $n \geq 1$, $|u_n| \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2$.

b) $u_{2p} = 1 + \frac{1}{2p} \rightarrow 1$ et $u_{2p+1} = -1 + \frac{1}{2p+1} \rightarrow -1$.

c) Deux sous-suites ont des limites différentes : (u_n) **diverge**. Bolzano-Weierstrass garantit pourtant l'existence de sous-suites convergentes, c'est ce que l'on vient d'exhiber.

15 Une récurrence affine



a) $u_1 = 8, u_2 = 7, u_3 = 6,5, u_4 = 6,25, u_5 = 6,125$.

b) $v_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3 - 6 = \frac{u_n - 6}{2} = \frac{v_n}{2}$: géométrique de raison $\frac{1}{2}$, de premier terme $v_0 = 4$.

c) $v_n = \frac{4}{2^n}$, donc $u_n = 6 + \frac{4}{2^n}$. Vérification : $u_5 = 6 + \frac{4}{32} = 6,125$. La limite est 6, l'unique point fixe de $x \mapsto \frac{x}{2} + 3$.

16 Extremum d'une fraction rationnelle



Pour tout réel x , $\frac{1}{2} - \frac{x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{2(1+x^2)} = \frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)} \geq 0$. Donc $\frac{1}{2}$ majore A , et il est atteint pour $x = 1$: $\max A = \frac{1}{2}$.

De même $\frac{1}{2} + \frac{x}{1+x^2} = \frac{(x+1)^2}{2(1+x^2)} \geq 0$, donc $-\frac{1}{2}$ minore A , atteint pour $x = -1$: $\min A = -\frac{1}{2}$.

17 Un irrationnel entre deux fractions



a) Supposons $r\sqrt{2} = q$ avec q rationnel. Alors $\sqrt{2} = \frac{q}{r}$ serait rationnel, ce qui est faux. Donc $r\sqrt{2}$ est irrationnel.

b) On cherche un rationnel r entre $\frac{1}{3\sqrt{2}} \approx 0,2357$ et $\frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0,3536$: prenons $r = 0,3$. Alors $0,3\sqrt{2} \approx 0,4243$, irrationnel d'après a), et $\frac{1}{3} \approx 0,3333 < 0,4243 < 0,5$.

18 Réurrence polynomiale convergente

★★★★

Encadrement. $u_0 = 0$ convient. Si $0 \leq u_n < 1$, alors $0 \leq u_n^2 < 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{3} \in \left[\frac{2}{3}; 1 \right], \text{ donc } 0 \leq u_{n+1} < 1.$$

Croissance. $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{3} = \frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{3}$. Avec $u_n < 1$, les deux facteurs sont négatifs, donc la différence est positive.

Limite. Croissante et majorée, (u_n) converge vers $\ell \leq 1$ avec $\ell = \frac{\ell^2 + 2}{3}$, soit

$$\ell^2 - 3\ell + 2 = 0, \text{ donc } \ell \in \{1, 2\}. \text{ Comme } \ell \leq 1, \ell = 1. \text{ Premiers termes : } u_1 = \frac{2}{3},$$

$$u_2 = \frac{22}{27}.$$

19 Une récurrence qui diverge

★★★★

Si $u_n \geq 3$, alors $u_{n+1} \geq \frac{9 + 2}{3} = \frac{11}{3} > 3$: la minoration passe de n à $n + 1$.

Comme $u_n > 2$, $u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)(u_n - 2)}{3} > 0$: la suite est croissante.

Si elle convergerait, sa limite $\ell \geq 3$ serait un point fixe, donc dans $\{1, 2\}$: contradiction.

Croissante et non convergente, elle est non majorée et tend vers $+\infty$.

$$u_1 = \frac{11}{3} \text{ et } u_2 = \frac{139}{27} \approx 5,148.$$

20 Suite de Cauchy et série des inverses des carrés

★★★★

a) $u_p - u_q = \sum_{k=q+1}^p \frac{1}{k^2} \geq 0$, et $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. La somme télescope :

$$u_p - u_q \leq \frac{1}{q} - \frac{1}{p} < \frac{1}{q}. \text{ Pour } \varepsilon > 0, \text{ on prend un entier } N > \frac{1}{\varepsilon} : \text{ pour } p, q \geq N,$$

$$|u_p - u_q| < \frac{1}{\min(p, q)} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon. \text{ La suite est de Cauchy, donc converge.}$$

b) $H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ pour tout n . Avec $p = 2n$ et $q = n$ aussi grands que l'on veut, l'écart reste au moins $\frac{1}{2}$: (H_n) n'est pas de Cauchy, donc diverge.

21 Algorithme de Héron pour racine de 7



a) $u_1 = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{7}{3} \right) = \frac{8}{3}$ et $u_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} + \frac{21}{8} \right) = \frac{127}{48}$.

b) $u_{n+1}^2 - 7 = \frac{1}{4} \left(u_n^2 + 14 + \frac{49}{u_n^2} \right) - 7 = \frac{1}{4} \left(u_n^2 - 14 + \frac{49}{u_n^2} \right) = \frac{1}{4} \left(u_n - \frac{7}{u_n} \right)^2 \geq 0$

. Tous les termes sont positifs, donc $u_n \geq \sqrt{7}$ pour $n \geq 1$.

c) $u_{n+1} - u_n = \frac{7 - u_n^2}{2u_n} \leq 0$ dès que $u_n \geq \sqrt{7}$. Décroissante et minorée, la suite converge

vers $\ell \geq \sqrt{7}$ tel que $\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{7}{\ell} \right)$, soit $\ell^2 = 7 : \ell = \sqrt{7}$.

d) $u_2 \approx 2,645833$ et $\sqrt{7} \approx 2,645751$: l'écart est d'environ $8,2 \times 10^{-5}$. La suite est formée de rationnels qui approchent un irrationnel.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

 **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

 QCM de maths

Nombres réels et suites : exercices de maths Licence L1

Nombres réels et suites : QCM de maths Licence L1



Contrôles de maths

Nombres réels et suites : contrôle de maths Licence L1



Exercices de maths

Limites et continuité : exercices de maths Licence L1



Exercices de maths

Dérivation et formules de Taylor : exercices de maths Licence L1



QCM de maths

Limites et continuité : QCM de maths Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage