

Nombres et ensembles de nombres : cours de maths 2de à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths 2de

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Les nombres ne forment pas un bloc unique : on les range en familles emboîtées, chacune plus riche que la précédente. Dans ce chapitre tu apprends à reconnaître la famille d'un nombre, à décrire des ensembles de réels avec des intervalles, à mesurer des distances avec la valeur absolue et à encadrer proprement un résultat.

1. Les ensembles de nombres usuels

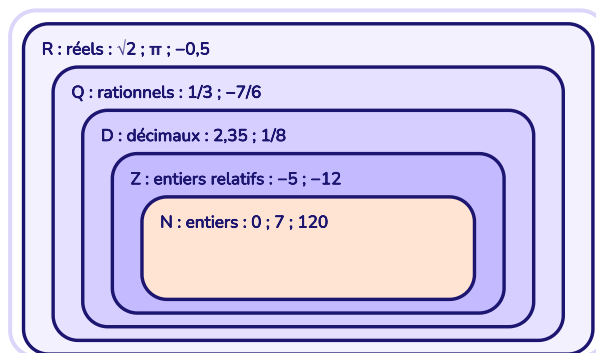
Un **ensemble** est une collection d'objets. On écrit $x \in E$ quand le nombre x appartient à l'ensemble E , et $E \subset F$ quand tout élément de E est aussi un élément de F (on dit que E est inclus dans F).

D

Les cinq ensembles

- $\mathbb{N}$: les entiers naturels $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots$
- $\mathbb{Z}$: les entiers relatifs, c'est-à-dire les entiers naturels et leurs opposés.
- $\mathbb{D}$: les nombres décimaux, de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ (écriture décimale finie).
- $\mathbb{Q}$: les nombres rationnels, de la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et b entier non nul.
- $\mathbb{R}$: les nombres réels, tous les points de la droite numérique.

Ces ensembles s'emboîtent : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Le schéma ci-dessous donne un exemple de nombre pour chacun.



Erreur classique Un nombre appartient à plusieurs ensembles à la fois. Le nombre -4 est dans $\mathbb{Z}$, mais aussi dans $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$. Quand on demande « le plus petit ensemble », on cherche le premier de la liste $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ qui le contient.

2. Décimaux, rationnels, irrationnels

Un nombre comme $0,375$ est décimal : $0,375 = \frac{375}{1000}$. Un nombre comme $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ est rationnel mais pas décimal : ses décimales ne s'arrêtent jamais (elles se répètent).

P**Quand une fraction est-elle décimale ?**

Une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ est un nombre décimal si et seulement si le dénominateur b n'a pas d'autre diviseur premier que **2** et **5**.

Par exemple $\frac{7}{40}$ est décimal car $40 = 2^3 \times 5$, alors que $\frac{5}{12}$ ne l'est pas car $12 = 2^2 \times 3$.

Attention : il faut d'abord simplifier la fraction, car $\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0,4$ est décimal malgré le **3** de **15**.

Les nombres réels qui ne sont pas rationnels s'appellent **irrationnels** : $\sqrt{2}$, π , $\sqrt{5}$... Leur écriture décimale est infinie et sans motif qui se répète.

P**Théorème**

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Démonstration (par l'absurde). Supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $\frac{p}{q}$ irréductible. Alors $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair, donc p est pair : $p = 2k$. On obtient $4k^2 = 2q^2$, soit $q^2 = 2k^2$, donc q est pair aussi. Les deux entiers p et q sont pairs : la fraction n'était pas irréductible, ce qui est absurde.

E**Exemple 1 : classer des nombres**

Pour chaque nombre, donnons le plus petit ensemble qui le contient.

- $\frac{36}{12} = 3$ appartient à $\mathbb{N}$.
- $-0,25 = -\frac{25}{100}$ appartient à $\mathbb{D}$ (pas à $\mathbb{Z}$).
- $\frac{11}{6}$: fraction irréductible avec $6 = 2 \times 3$, donc dans $\mathbb{Q}$ mais pas dans $\mathbb{D}$.
- $\sqrt{12}$: 12 n'est pas un carré parfait, donc $\sqrt{12}$ est irrationnel : il est dans $\mathbb{R}$ seulement.



Le conseil de Zyro Sur ma planète, on teste une fraction en trois gestes : je simplifie, je décompose le dénominateur en facteurs premiers, et je regarde s'il reste autre chose que des 2 et des 5. Essaie, c'est imparable !

3. La droite réelle et les intervalles

Chaque réel correspond à un point d'une droite graduée, et réciproquement. On décrit les parties de cette droite avec des **intervalles**.

Inégalité	Intervalle	Lecture
$a \leq x \leq b$	$[a ; b]$	segment : extrémités comprises
$a < x < b$	$]a ; b[$	extrémités exclues
$a \leq x < b$	$[a ; b[$	a compris, b exclu
$x \geq a$	$[a ; +\infty[$	tous les réels à partir de a
$x < b$	$] - \infty ; b[$	tous les réels strictement avant b

Le crochet est tourné vers l'intérieur de l'intervalle quand l'extrémité est comprise, et vers l'extérieur quand elle est exclue. Du côté de $\pm\infty$, le crochet est toujours tourné vers l'extérieur, car l'infini n'est pas un nombre.



La figure représente l'intervalle $[-2 ; 3[$: le point -2 est dans l'ensemble, le point 3 n'y est pas.

D Réunion et intersection

La **réunion** $A \cup B$ contient les nombres qui sont dans A ou dans B . L'**intersection** $A \cap B$ contient ceux qui sont dans A et dans B . S'il n'y en a aucun, on écrit $A \cap B = \emptyset$.

E Exemple 2 : réunion et intersection

Soit $A = [-3; 4[$ et $B =]1; 7]$. En plaçant les deux intervalles sur une droite, on lit :

$$A \cap B =]1; 4[\text{ et } A \cup B = [-3; 7].$$

4. Valeur absolue et distance

D Valeur absolue

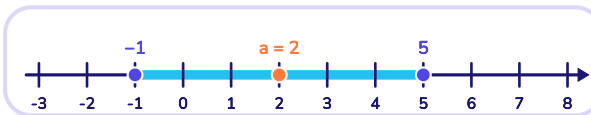
La valeur absolue d'un réel x est $|x| = x$ si $x \geq 0$ et $|x| = -x$ si $x \leq 0$. C'est la distance de x à 0 sur la droite graduée.

Ainsi $|5| = 5$ et $|-5| = 5$. Plus généralement, la distance entre deux réels a et b vaut $|a - b|$ (ou $|b - a|$, c'est la même chose).

P

Propriétés

- $|x| \geq 0$ pour tout réel x , et $|x| = 0$ seulement si $x = 0$.
- $|a \times b| = |a| \times |b|$.
- $\sqrt{x^2} = |x|$.
- Pour $r \geq 0$: $|x - a| \leq r$ équivaut à $a - r \leq x \leq a + r$, c'est-à-dire $x \in [a - r; a + r]$.
- Pour $r > 0$: $|x - a| \geq r$ équivaut à $x \leq a - r$ ou $x \geq a + r$.



Erreur classique En général $|a + b| \neq |a| + |b|$. Avec $a = 3$ et $b = -1$: $|a + b| = 2$ alors que $|a| + |b| = 4$. On a seulement $|a + b| \leq |a| + |b|$.

E

Exemple 3 : équation et inéquation

Réolvons $|x - 2| = 3$. On cherche les points situés à distance **3** de **2** : $x = -1$ ou $x = 5$.

Réolvons $|x - 2| \leq 3$. Les points à distance au plus **3** de **2** forment l'intervalle $[-1; 5]$, comme sur la figure.

5. Calculs sur les nombres : règles utiles

M

Méthode : calculer avec des fractions

1. Pour additionner ou soustraire, on met les fractions au même dénominateur (le plus petit possible).
2. Pour multiplier, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, en simplifiant avant si possible.
3. Pour diviser par une fraction, on multiplie par son inverse.
4. On simplifie le résultat pour obtenir une fraction irréductible.

Rappelons aussi les règles sur les puissances, pour n et m entiers relatifs et $a \neq 0$:

$$a^n \times a^m = a^{n+m}, \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, (a^n)^m = a^{nm} \text{ et } a^{-n} = \frac{1}{a^n}. \text{ Par exemple } \frac{3^4}{3^6} = 3^{-2} = \frac{1}{9}.$$

Enfin, un produit ou une somme de deux rationnels reste rationnel, mais la somme de deux irrationnels peut être rationnelle : $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$.

6. Valeurs approchées et encadrements

Un nombre comme $\sqrt{2}$ ne s'écrit pas exactement avec un nombre fini de décimales. On le **encadre** : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ est un encadrement d'amplitude **0,01**, à 10^{-2} près. L'**arrondi** est la valeur approchée la plus proche, la **troncature** coupe simplement les décimales : pour

$$\frac{100}{7} = 14,2857\dots, \text{ la troncature au centième est } 14,28 \text{ et l'arrondi au centième est } 14,29.$$

P**Encadrements et opérations**

Si $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$, alors :

- $a + c \leq x + y \leq b + d$;
- $a - d \leq x - y \leq b - c$ (on soustrait les bornes « croisées ») ;
- si tous les nombres sont positifs : $a \times c \leq x \times y \leq b \times d$.

E**Exemple 4 : opérer sur des encadrements**

On sait que $3,1 \leq x \leq 3,2$ et $0,5 \leq y \leq 0,6$.

Somme : $3,6 \leq x + y \leq 3,8$. Différence : $3,1 - 0,6 \leq x - y \leq 3,2 - 0,5$, soit $2,5 \leq x - y \leq 2,7$. Produit : $3,1 \times 0,5 \leq xy \leq 3,2 \times 0,6$, soit $1,55 \leq xy \leq 1,92$.

À retenir

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: un nombre peut appartenir à plusieurs ensembles.
- Une fraction irréductible est décimale si et seulement si son dénominateur ne contient que les facteurs premiers 2 et 5.
- $\sqrt{2}$ et π sont irrationnels : ils sont réels sans être rationnels.
- Crochet vers l'intérieur : borne comprise ; crochet vers l'extérieur : borne exclue ; toujours exclu en $\pm\infty$.
- $|x - a| \leq r$ équivaut à $x \in [a - r ; a + r]$: c'est « à distance au plus r de a ».
- Pour encadrer une différence, on croise les bornes ; pour un produit, tout doit être positif.

Le livre de cours de maths 2de

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Nombres et ensembles de nombres :
exercices de maths 2de

Contrôles de maths

Nombres et ensembles de nombres :
contrôle de maths 2de

QCM de maths

Nombres et ensembles de nombres :
QCM de maths 2de

Exercices de maths

Calcul littéral et identités : exercices de
maths 2de

 Exercices de maths

Équations et inéquations : exercices de maths 2de

 Contrôles de maths

Calcul littéral et identités : contrôle de maths 2de

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage