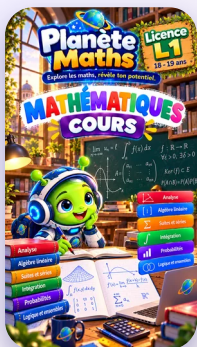


# Complexes et polynômes : cours de maths Licence L1 à télécharger en PDF



## Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

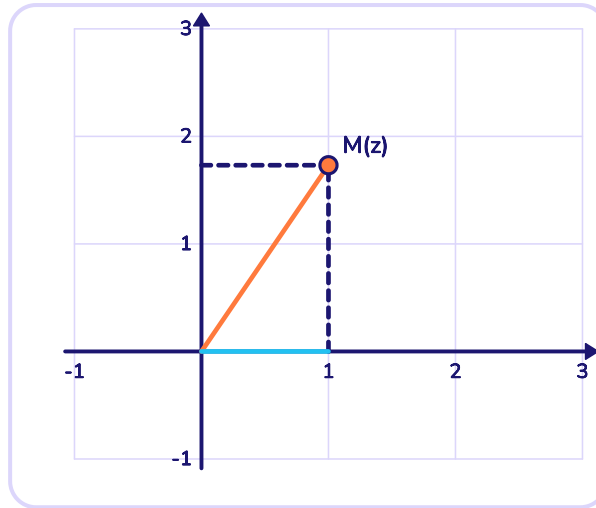
Les nombres complexes et les polynômes forment un couple inséparable : les premiers donnent aux seconds toutes leurs racines, les seconds fournissent aux premiers leurs équations les plus naturelles. Dans ce chapitre, on passe de l'écriture algébrique à l'écriture trigonométrique pour résoudre  $z^n = a$ , puis on développe l'arithmétique des polynômes (division, PGCD, irréductibles) et on termine par la décomposition des fractions rationnelles.

## 1. Forme trigonométrique

D

### Module et argument

Soit  $z = a + ib$  un complexe non nul. Son **module** est  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Un **argument** de  $z$  est un réel  $\theta$  tel que  $a = |z| \cos \theta$  et  $b = |z| \sin \theta$  ; il est défini modulo  $2\pi$ . On écrit alors  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$  avec  $r = |z|$ .



### E Exemple 1 : passer à la forme trigonométrique

Soit  $z = 1 + i\sqrt{3}$ . Alors  $|z| = \sqrt{1+3} = 2$ , donc  $\cos \theta = \frac{1}{2}$  et  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , ce qui donne  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

Ainsi  $z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{i\pi/3}$ .

### P Produit, quotient, puissance

Pour  $z = re^{i\theta}$  et  $z' = r'e^{i\theta'}$  :  $zz' = rr' e^{i(\theta+\theta')}$ ,  $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$  et, pour tout entier  $n$ , formule de Moivre :  $z^n = r^n e^{in\theta}$ , c'est-à-dire  $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ .



### Attention

Un argument n'est jamais unique :  $\theta$  et  $\theta + 2\pi$  décrivent le même complexe. Quand on divise un argument par  $n$  (voir la partie suivante), cette ambiguïté crée  $n$  solutions différentes.

## 2. Racines n-ièmes

P

### Racines n-ièmes d'un complexe

Soit  $a = \rho e^{i\varphi}$  un complexe non nul et  $n \geq 1$ . L'équation  $z^n = a$  possède exactement  $n$  solutions, données par

$$z_k = \rho^{1/n} e^{i(\varphi+2k\pi)/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Elles sont régulièrement réparties sur le cercle de centre  $O$  et de rayon  $\rho^{1/n}$ .

*Idée de la preuve.* Si  $z = re^{i\theta}$ , alors  $z^n = r^n e^{in\theta}$ . L'égalité avec  $\rho e^{i\varphi}$  impose  $r^n = \rho$  et  $n\theta = \varphi + 2k\pi$  avec  $k$  entier ; les valeurs  $k$  et  $k+n$  redonnent le même complexe, d'où exactement  $n$  racines.

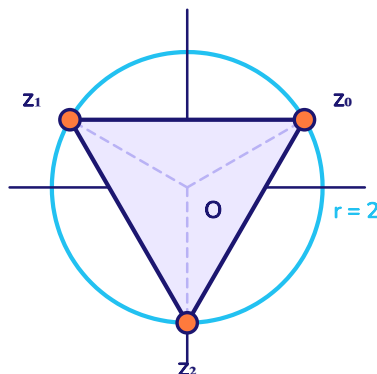
E

### Exemple 2 : racines cubiques de $8i$

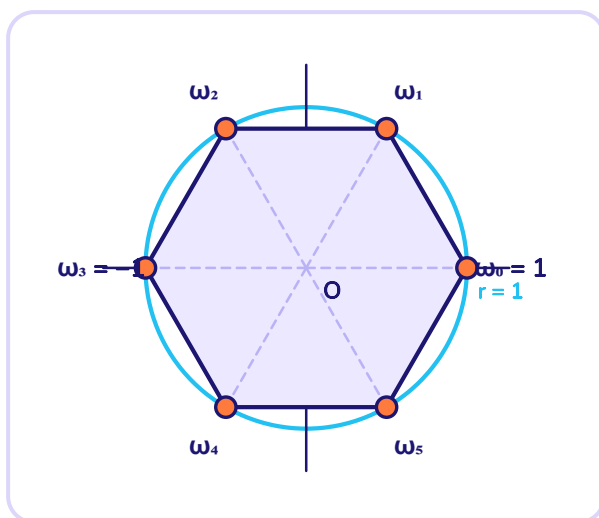
On a  $8i = 8e^{i\pi/2}$ , donc  $z_k = 2e^{i(\pi/2+2k\pi)/3}$  :

$$z_0 = 2e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i, \quad z_1 = 2e^{i5\pi/6} = -\sqrt{3} + i, \quad z_2 = 2e^{i3\pi/2} = -2i.$$

Vérification :  $(-2i)^3 = -8i^3 = 8i$ .



Pour  $a = 1$ , les solutions de  $z^n = 1$  sont les **racines n-ièmes de l'unité**  $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ . Elles forment un polygone régulier inscrit dans le cercle unité, et leur somme vaut **0** dès que  $n \geq 2$ .



### 3. Polynômes et division euclidienne

Un polynôme à coefficients dans  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) s'écrit  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$  ; si  $a_d \neq 0$ ,  $d = \deg P$  est son **degré**. On convient que  $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$ .

#### P Division euclidienne

Soient  $A$  et  $B$  deux polynômes,  $B \neq 0$ . Il existe un unique couple  $(Q, R)$  de polynômes tel que

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad \deg R < \deg B.$$

$Q$  est le quotient,  $R$  le reste.  $B$  divise  $A$  si et seulement si  $R = 0$ .

**M****Méthode : poser la division**

1. Divise le terme de plus haut degré du reste courant par celui de  $B$  : c'est le prochain terme du quotient.
2. Multiplie ce terme par  $B$  et soustrais le résultat au reste courant.
3. Recommence tant que le degré du reste est supérieur ou égal à  $\deg B$ .

**E**

**Exemple 3 : division de  $3X^3 - 2X^2 + 5X - 1$  par  $X^2 + 2$**

$3X \times (X^2 + 2) = 3X^3 + 6X$  ; il reste  $-2X^2 - X - 1$ . Puis  
 $-2 \times (X^2 + 2) = -2X^2 - 4$  ; il reste  $-X + 3$ , de degré  $1 < 2$ .

Donc  $3X^3 - 2X^2 + 5X - 1 = (X^2 + 2)(3X - 2) + (-X + 3)$ .

## 4. Racines et multiplicité

**P****Racine et factorisation**

Un scalaire  $a$  est racine de  $P$  ( $P(a) = 0$ ) si et seulement si  $X - a$  divise  $P$ . Un polynôme non nul de degré  $d$  a au plus  $d$  racines.

**D****Multiplicité**

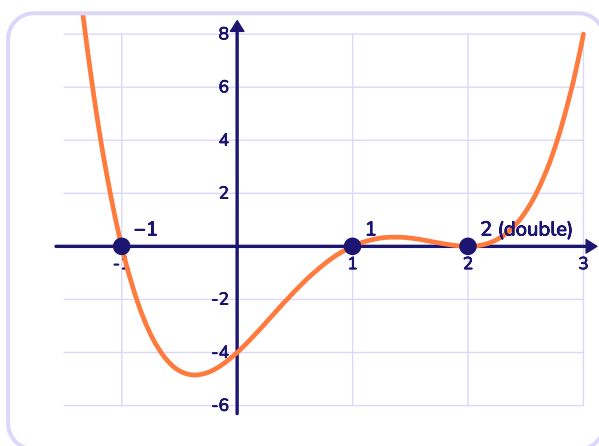
La racine  $a$  est de multiplicité  $m \geq 1$  si  $(X - a)^m$  divise  $P$  mais pas  $(X - a)^{m+1}$ .  
 Sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , cela équivaut à  $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0$  et  $P^{(m)}(a) \neq 0$ .

#### E Exemple 4 : une racine double

Soit  $P = X^4 - 4X^3 + 3X^2 + 4X - 4$ . On calcule

$P(2) = 16 - 32 + 12 + 8 - 4 = 0$ ,  $P' = 4X^3 - 12X^2 + 6X + 4$  donc

$P'(2) = 32 - 48 + 12 + 4 = 0$ , puis  $P'' = 12X^2 - 24X + 6$  et  $P''(2) = 6 \neq 0$ . La racine 2 est donc **double**, et  $P = (X - 2)^2(X^2 - 1)$ .



Sur la courbe, une racine simple correspond à une traversée de l'axe, une racine double à un contact avec l'axe sans changement de signe.

## 5. PGCD de polynômes

### D PGCD

Le **PGCD** de deux polynômes non nuls  $A$  et  $B$  est l'unique polynôme unitaire de plus grand degré qui divise à la fois  $A$  et  $B$ . Si  $A = BQ + R$ , alors

$\text{PGCD}(A, B) = \text{PGCD}(B, R)$  : c'est l'**algorithme d'Euclide**, dont le dernier reste non nul (rendu unitaire) est le PGCD.

### E Exemple 5 : algorithme d'Euclide

Soient  $A = X^3 - 7X + 6$  et  $B = X^2 - X - 2$ . On trouve  $A = B(X + 1) + (-4X + 8)$ . Puis  $B = (X - 2)(X + 1)$ , qui est divisible par  $-4X + 8 = -4(X - 2)$  : le reste suivant est nul.

Le dernier reste non nul est  $-4(X - 2)$ , donc  $\text{PGCD}(A, B) = X - 2$ .

Le théorème de Bézout s'applique : il existe  $U, V$  tels que  $AU + BV = \text{PGCD}(A, B)$ , obtenus en remontant les divisions. Deux polynômes sont **premiers entre eux** si leur PGCD vaut 1.

## 6. Polynômes irréductibles

### D Irréductible

Un polynôme non constant est **irréductible** s'il n'est pas le produit de deux polynômes non constants.

### P Théorème de d'Alembert-Gauss et conséquences

Tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ . Par conséquent :

- sur  $\mathbb{C}$ , les irréductibles sont les polynômes de degré 1 ;
- sur  $\mathbb{R}$ , ce sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 de discriminant strictement négatif.

La clé pour  $\mathbb{R}$  : si  $P$  est à coefficients réels et  $z$  racine non réelle, alors  $\bar{z}$  l'est aussi, avec la même multiplicité, et  $(X - z)(X - \bar{z}) = X^2 - 2\text{Re}(z)X + |z|^2$  est un facteur réel de degré 2.

## 7. Décomposition en facteurs

Tout polynôme non constant se décompose de façon unique, à l'ordre près, en produit d'une constante et de polynômes unitaires irréductibles.

### E Exemple 6 : décomposer $X^4 - 1$ et $X^3 - 1$

Sur  $\mathbb{R}$  :  $X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$ . Sur  $\mathbb{C}$ , on factorise encore  $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$  :  $X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i)$ , les quatre racines quatrièmes de l'unité.

De même  $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$  sur  $\mathbb{R}$  (le trinôme a pour discriminant  $-3$ ), et sur  $\mathbb{C}$  :  $(X - 1)(X - j)(X - j^2)$  avec  $j = e^{2i\pi/3}$ .

## 8. Fractions rationnelles

Une **fraction rationnelle** est un quotient  $F = \frac{P}{Q}$  de deux polynômes,  $Q \neq 0$ . La division euclidienne de  $P$  par  $Q$  donne  $F = E + \frac{R}{Q}$  :  $E$  est la **partie entière**, et  $\deg R < \deg Q$ .

### P Éléments simples

Si  $Q$  a des racines simples  $a_1, \dots, a_n$  et si  $\deg P < \deg Q$ , alors  $\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{X - a_i}$

avec  $\lambda_i = \frac{P(a_i)}{Q'(a_i)}$ . Pour une racine  $a$  de multiplicité  $m$ , on introduit

$$\frac{c_1}{X - a} + \dots + \frac{c_m}{(X - a)^m}.$$

**E****Exemple 7 : décomposer en éléments simples**

Pour  $F = \frac{3X+5}{(X-1)(X+2)} : \lambda_1 = \frac{3+5}{1+2} = \frac{8}{3}$  (valeur de  $\frac{3X+5}{X+2}$  en 1) et

$$\lambda_2 = \frac{-6+5}{-2-1} = \frac{1}{3}.$$

Donc  $F = \frac{8}{3(X-1)} + \frac{1}{3(X+2)}$ . Contrôle :  $\frac{8}{3}(X+2) + \frac{1}{3}(X-1) = 3X+5$ .

**!****Astuce de Zyro**

Pour vérifier une décomposition, remets tout au même dénominateur, ou teste une valeur simple comme  $X = 0$  : si les deux côtés diffèrent, l'erreur se trouve vite.

**À retenir**

- $z = re^{i\theta}$  avec  $r = |z|$  ; les modules se multiplient et les arguments s'additionnent ;  
 $z^n = r^n e^{in\theta}$ .
- $z^n = \rho e^{i\varphi}$  a exactement  $n$  racines  $\rho^{1/n} e^{i(\varphi+2k\pi)/n}$ , sommets d'un polygone régulier.
- Division euclidienne :  $A = BQ + R$  avec  $\deg R < \deg B$ , unique.
- $a$  est racine de  $P \iff (X - a) \mid P$  ; multiplicité  $m \iff P(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \neq P^{(m)}(a)$ .
- PGCD : algorithme d'Euclide, dernier reste non nul rendu unitaire.
- Irréductibles : degré 1 sur  $\mathbb{C}$  ; degré 1 ou degré 2 avec  $\Delta < 0$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Fractions rationnelles : partie entière + éléments simples.

## Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

### Zyro te conseille la suite

#### Exercices de maths

Complexes et polynômes : exercices de maths Licence L1

#### Contrôles de maths

Complexes et polynômes : contrôle de maths Licence L1

#### QCM de maths

Complexes et polynômes : QCM de maths Licence L1

#### Exercices de maths

Arithmétique et structures : exercices de maths Licence L1

 **Exercices de maths**

Espaces vectoriels : exercices de maths  
Licence L1

 **Contrôles de maths**

Arithmétique et structures : contrôle de  
maths Licence L1

**Zyro vous emmène sur nos sites partenaires**

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage