

Complexes et polynômes : exercices corrigés de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Module et argument



$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. On a $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, donc $\theta = \frac{\pi}{4}$ (modulo 2π).

Ainsi $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

2 Écrire des réels et imaginaires purs



$z_1 = -3$: module 3, argument π , donc $z_1 = 3(\cos \pi + i \sin \pi)$.

$z_2 = 5i$: module 5, argument $\frac{\pi}{2}$, donc $z_2 = 5 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$.

3 Retour à la forme algébrique



$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Donc } z = 4 \times \frac{1}{2} + 4i \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 + 2i\sqrt{3}.$$

4 Un reste à calculer



$X^2 \times (X + 2) = X^3 + 2X^2$; il reste $-X + 4$. Puis $-1 \times (X + 2) = -X - 2$; il reste **6**, de degré $0 < 1$.

$$\text{Donc } X^3 + 2X^2 - X + 4 = (X + 2)(X^2 - 1) + 6.$$

5 Racine ou pas racine



$$P(2) = 4 - 10 + 6 = 0 : \text{oui. } P(1) = 1 - 5 + 6 = 2 \neq 0 : \text{non.}$$

Comme **2** est racine, $P = (X - 2)(X - 3)$ (la somme des racines vaut **5**, leur produit **6**).

6 Racines cubiques de l'unité



$$1 = e^{i0}, \text{ donc } z_k = e^{2ik\pi/3} \text{ pour } k = 0, 1, 2 : 1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}.$$

$$e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } e^{4i\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

7 Factoriser avec une racine évidente



$$P(1) = 1 - 2 + 1 = 0, \text{ donc } X - 1 \text{ divise } P. \text{ La division donne}$$

$$P = (X - 1)(X^2 + X - 1), \text{ car}$$

$$(X - 1)(X^2 + X - 1) = X^3 + X^2 - X - X^2 - X + 1 = X^3 - 2X + 1.$$

8 Produit et quotient



Les modules se multiplient et les arguments s'additionnent :

$$z_1 z_2 = 6 e^{i(\pi/4 + \pi/6)} = 6 e^{i5\pi/12}.$$

Pour le quotient : $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} e^{i(\pi/4 - \pi/6)} = \frac{2}{3} e^{i\pi/12}.$

9 Une puissance avec Moivre



$$1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}. \text{ D'après Moivre, } (1 + i)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{i8\pi/4} = 16 e^{2i\pi} = 16.$$

10 Racines quatrièmes de -16



$$-16 = 16 e^{i\pi}, \text{ donc } z_k = 2 e^{i(\pi + 2k\pi)/4}, k = 0, \dots, 3, \text{ d'arguments } \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}.$$

Comme $2 \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, on obtient

$$S = \{\sqrt{2}(1 + i), \sqrt{2}(-1 + i), \sqrt{2}(-1 - i), \sqrt{2}(1 - i)\}.$$

11 Division à diviseur de degré 2



$$2X^2 \times B = 2X^4 - 2X^3 + 2X^2; \text{ il reste } -X^3 - 2X^2 + X - 5. \text{ Puis}$$

$$-X \times B = -X^3 + X^2 - X; \text{ il reste } -3X^2 + 2X - 5. \text{ Puis}$$

$$-3 \times B = -3X^2 + 3X - 3; \text{ il reste } -X - 2, \text{ de degré } 1 < 2.$$

$$Q = 2X^2 - X - 3 \text{ et } R = -X - 2.$$

12 Multiplicité par les dérivées



$$P(2) = 16 - 32 + 12 + 8 - 4 = 0. P' = 4X^3 - 12X^2 + 6X + 4,$$

$$P'(2) = 32 - 48 + 12 + 4 = 0. P'' = 12X^2 - 24X + 6, P''(2) = 6 \neq 0 : \text{ multiplicité } 2.$$

Alors $(X - 2)^2 = X^2 - 4X + 4$ divise P , et

$$P = (X^2 - 4X + 4)(X^2 - 1) = (X - 2)^2(X - 1)(X + 1).$$

13 PGCD par Euclide



$B(X+3) = X^3 - 7X + 6$, donc $A = B(X+3) + (6X-6)$. Le reste est $6(X-1)$.

Or $B = (X-1)(X-2)$ est divisible par $X-1$: le reste suivant est nul. Le PGCD est donc $X-1$.

14 Vrai ou faux : irréductibilité



a. Vrai : $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, pas de racine réelle.

b. Faux : sur $\mathbb{C}$ seuls les polynômes de degré 1 sont irréductibles ; ici

$$X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2).$$

c. Faux : $X^4 + 1 = (X^2 + 1)^2 - 2X^2 = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$, produit de deux polynômes de degré 2.

15 Somme des racines sixièmes



$\omega^6 = e^{2i\pi} = 1$ et $\omega \neq 1$. Par la somme géométrique, $\sum_{k=0}^5 \omega^k = \frac{1 - \omega^6}{1 - \omega} = 0$.

Les racines sixièmes de 64 sont $2\omega^k$ ($k = 0, \dots, 5$), car $2^6 = 64$. Leur somme vaut $2 \sum \omega^k = 0$.

16 Linéariser $\cos 3\theta$



Par Moivre, $(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$. En développant, la partie réelle est $\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$. Avec $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, on obtient $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$.

Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$: $4 \times \frac{1}{8} - 3 \times \frac{1}{2} = -1 = \cos \pi$. Cohérent.

17 Polynôme réel avec racine complexe

★★★★

Les coefficients étant réels, $1 - 2i$ est aussi racine. Le produit

$$(X - (1 + 2i))(X - (1 - 2i)) = X^2 - 2X + 5.$$

$$\text{Donc } P = (X - 3)(X^2 - 2X + 5) = X^3 - 5X^2 + 11X - 15.$$

18 Un paramétrage de divisibilité

★★★★

Les racines de $X^2 + X + 1$ sont j et j^2 , avec $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$. La condition $j^4 + aj^2 + b = 0$ s'écrit $j + aj^2 + b = 0$. Comme $j = -1 - j^2$, cela donne $(a - 1)j^2 + (b - 1) = 0$. Or j^2 n'est pas réel, donc $a = 1$ et $b = 1$.

$$\text{Vérification : } X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1).$$

19 Factoriser $X^4 + 4$

★★★★

$X^4 + 4 = (X^2 + 2)^2 - 4X^2 = (X^2 + 2X + 2)(X^2 - 2X + 2)$. Chaque facteur a pour discriminant $4 - 8 = -4 < 0$: ils sont irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Sur $\mathbb{C}$, $X^2 + 2X + 2 = (X + 1 - i)(X + 1 + i)$ et

$X^2 - 2X + 2 = (X - 1 - i)(X - 1 + i)$. Les quatre racines sont $\pm 1 \pm i$.

20 Éléments simples, racines simples

★★★★

On écrit $F = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+3}$. On a $a = \frac{1+7}{1+3} = 2$ et $b = \frac{-3+7}{-3-1} = -1$.

Donc $F = \frac{2}{X-1} - \frac{1}{X+3}$. Contrôle : $2(X+3) - (X-1) = X+7$.

21 Éléments simples avec pôle double

★★★

En multipliant par X^2 puis en prenant $X = 0 : b = \frac{1}{-1} = -1$. En multipliant par $X - 1$ puis $X = 1 : c = \frac{3}{1} = 3$. Le coefficient en X^2 du numérateur après réduction vaut $a + c = 0$, donc $a = -3$.

$$F = -\frac{3}{X} - \frac{1}{X^2} + \frac{3}{X-1}. \text{ Contrôle : } -3X(X-1) - (X-1) + 3X^2 = 2X + 1.$$

22 Une relation de Bézout

★★★

$A - B = X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3) = R_1$. Puis $B = R_1(X + 1) + (4X - 4)$, de reste $4(X - 1)$. Enfin $R_1 = (X - 1)(X - 3)$ est divisible par $X - 1$: PGCD = $X - 1$.

En remontant : $4(X - 1) = B - (X + 1)(A - B) = (X + 2)B - (X + 1)A$. Donc

$$U = -\frac{X+1}{4} \text{ et } V = \frac{X+2}{4}.$$

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Complexes et polynômes : exercices de maths Licence L1

 QCM de maths

Complexes et polynômes : QCM de maths Licence L1

 Contrôles de maths

Complexes et polynômes : contrôle de maths Licence L1

 Exercices de maths

Arithmétique et structures : exercices de maths Licence L1

 Exercices de maths

Espaces vectoriels : exercices de maths Licence L1

 QCM de maths

Arithmétique et structures : QCM de maths Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage