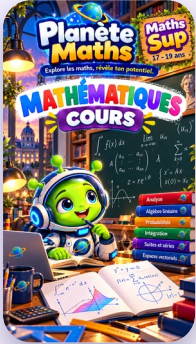


Nombres complexes et trigonométrie : cours de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Les nombres complexes prolongent les réels : ils permettent de résoudre toute équation polynomiale du second degré, de décrire les rotations du plan par un simple produit, et de transformer la trigonométrie en calcul sur des exponentielles. Ce chapitre construit les deux écritures d'un complexe (algébrique et exponentielle), les formules d'Euler et de Moivre, la linéarisation, les racines n -ièmes, et les usages géométriques.

1. Forme algébrique

D Définition

L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes contient $\mathbb{R}$ et un nombre i tel que $i^2 = -1$.
Tout complexe s'écrit de manière unique $z = a + ib$ avec a, b réels : $a = \operatorname{Re}(z)$ est la partie réelle, $b = \operatorname{Im}(z)$ la partie imaginaire. Deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et leurs parties imaginaires sont égales.

On calcule comme dans $\mathbb{R}$, en remplaçant i^2 par -1 . Les puissances de i sont périodiques : $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, puis $i^4 = 1$: on réduit l'exposant modulo 4.

E Exemple 1 : un quotient

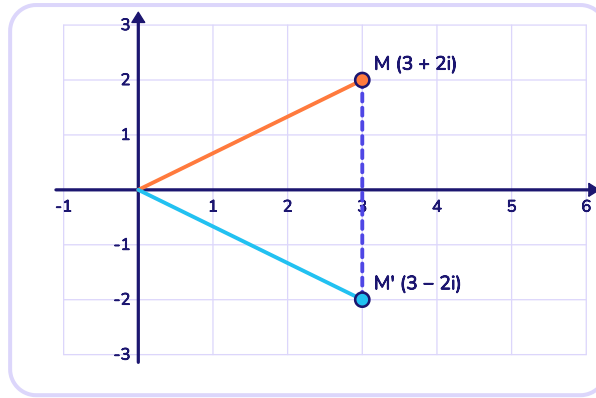
Écrire $\frac{4-i}{1+2i}$ sous forme algébrique. On multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué $1-2i$ du dénominateur :

$$\frac{(4-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{4-8i-i+2i^2}{1+4} = \frac{2-9i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{9}{5}i.$$

2. Conjugué et module

D Conjugué et module

Pour $z = a + ib$, le conjugué est $\bar{z} = a - ib$ et le module est $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dans le plan, $M(z)$ a pour symétrique $M'(\bar{z})$ par rapport à l'axe des réels, et $|z| = OM$.



P Propriétés

Pour tous complexes z, z' : $z\bar{z} = |z|^2$; $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$; $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$; $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$;
 $|zz'| = |z||z'|$; $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$ (si $z' \neq 0$) ; inégalité triangulaire $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.



Attention

En général $|z + z'| \neq |z| + |z'|$: avec $z = 1$ et $z' = -1$, le membre de gauche vaut 0 et celui de droite vaut 2. L'égalité n'a lieu que lorsque les deux points sont alignés avec l'origine du même côté.

3. Argument et forme trigonométrique

D Argument

Soit $z \neq 0$. Un argument de z est un réel θ tel que $\cos \theta = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|}$ et $\sin \theta = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|z|}$.
 Il est défini à 2π près, on note $\arg z \equiv \theta [2\pi]$. On a alors $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

M**Méthode : trouver un argument**

1. Calculer le module $r = |z|$.
2. Écrire $\cos \theta$ et $\sin \theta$ comme quotients de la partie réelle et de la partie imaginaire par r .
3. Reconnaître un angle usuel dont le cosinus et le sinus conviennent ; ne jamais se fier à la seule tangente, qui perd le signe.

E**Exemple 2**

Pour $z = -\sqrt{3} + 3i$: $|z| = \sqrt{3+9} = 2\sqrt{3}$, puis $\cos \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\theta \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

Pour $z, z' \neq 0$: $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'$, $\arg \frac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z'$, $\arg \bar{z} \equiv -\arg z$, toujours modulo 2π .

4. Forme exponentielle**D****Notation**

Pour tout réel θ , on pose $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Tout complexe non nul s'écrit $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et θ un argument : c'est la forme exponentielle.

La relation $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ se déduit des formules d'addition de $\cos$ et $\sin$. Elle donne $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$ et, pour n entier, $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$. Valeurs à connaître :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$e^{i\theta}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	i	-1

E Exemple 3 : une puissance

Calculer $(1 + i)^{12}$. On a $|1 + i| = \sqrt{2}$ et $\arg(1 + i) \equiv \frac{\pi}{4}$, donc $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et

$$(1 + i)^{12} = (\sqrt{2})^{12} e^{i3\pi} = 64 \times (-1) = -64.$$

5. Formules d'Euler et de Moivre

P Euler et Moivre

Pour tout réel x :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Pour tout entier n : $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$ (formule de Moivre).

Preuve d'Euler : $e^{ix} + e^{-ix} = (\cos x + i \sin x) + (\cos x - i \sin x) = 2 \cos x$; la différence donne $2i \sin x$. Moivre n'est que la règle $(e^{ix})^n = e^{inx}$.



Astuce de Zyro

Sur ma planète, on n'apprend jamais **$\cos 2x$** ni **$\sin 3x$** par cœur : on développe **$(\cos x + i \sin x)^n$** avec le binôme, on compare à **$\cos(nx) + i \sin(nx)$** , et la partie réelle puis la partie imaginaire livrent les formules.

6. Linéarisation

Linéariser, c'est transformer un produit de puissances de **$\cos x$** et **$\sin x$** en somme de termes **$\cos(kx)$** et **$\sin(kx)$** , ce qui est précieux pour intégrer ou résoudre des équations.



Méthode

1. Remplacer **$\cos x$** et **$\sin x$** par leurs expressions d'Euler.
2. Développer avec le binôme de Newton.
3. Regrouper les termes conjugués **e^{ikx}** et **e^{-ikx}** : leur somme vaut **$2 \cos(kx)$** , leur différence **$2i \sin(kx)$** .



Exemple 4

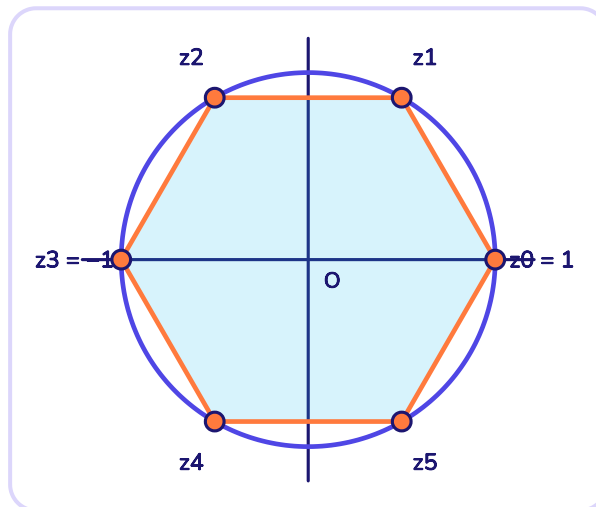
$$\cos^3 x = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^3}{8} = \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} = \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4}.$$

7. Racines n-ièmes

P

Racines de l'unité

Pour $n \geq 1$, l'équation $z^n = 1$ a exactement n solutions : $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$ avec $k = 0, \dots, n-1$. Si $n \geq 2$, leur somme est nulle ; ils sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle unité.



P

Racines d'un complexe quelconque

Si $a = \rho e^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$, l'équation $z^n = a$ a exactement n solutions :
 $z_k = \rho^{1/n} e^{i(\alpha+2k\pi)/n}$, $k = 0, \dots, n-1$.

E

Exemple 5

Résoudre $z^3 = -8$. Ici $-8 = 8e^{i\pi}$, donc $z_k = 2e^{i(\pi+2k\pi)/3}$: $z_0 = 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$,
 $z_1 = 2e^{i\pi} = -2$, $z_2 = 2e^{i5\pi/3} = 1 - i\sqrt{3}$.

8. Équations du second degré

P Résolution dans $\mathbb{C}$

Soit $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$. Si δ est une racine carrée de Δ (c'est-à-dire $\delta^2 = \Delta$), les solutions sont $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$. Si a, b, c sont réels et $\Delta < 0$, on prend $\delta = i\sqrt{-\Delta}$: les solutions sont complexes conjuguées.

M Méthode : racine carrée de $w = p + iq$

Chercher $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = w$ revient au système $x^2 - y^2 = p$, $2xy = q$ et $x^2 + y^2 = |w|$. On en tire x^2 et y^2 , puis les signes grâce à celui de q .

E Exemple 6

Résoudre $z^2 - (1 + 3i)z + (-2 + 2i) = 0$. On trouve $\Delta = (1 + 3i)^2 - 4(-2 + 2i) = -2i$. Comme $(1 - i)^2 = -2i$, on prend $\delta = 1 - i$ et

$$z = \frac{1 + 3i \pm (1 - i)}{2} \quad \text{donc} \quad z = 1 + i \quad \text{ou} \quad z = 2i.$$

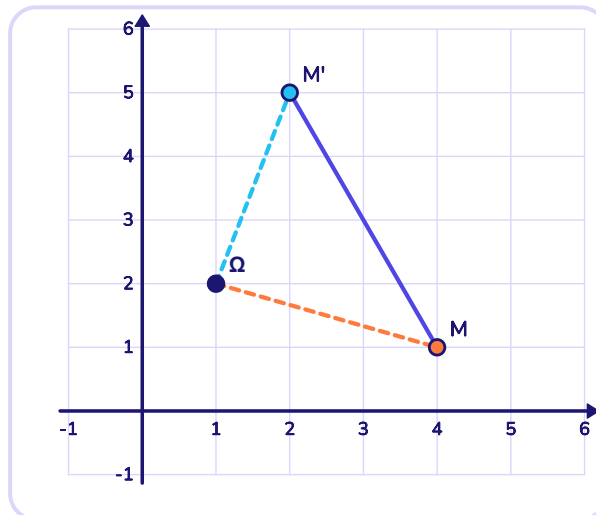
9. Interprétation géométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Au point M on associe son affixe z_M . Pour deux points A, B d'affixes a, b : le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$, la distance est $AB = |b - a|$, et l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$ a pour mesure $\arg(b - a)$.

P

Alignement, orthogonalité, transformations

- Pour $A \neq B$ et $A \neq C$: $\frac{c-a}{b-a} = \frac{AC}{AB} e^{i\varphi}$ où φ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Les points A, B, C sont alignés si et seulement si ce quotient est réel ; $(AB) \perp (AC)$ si et seulement si il est imaginaire pur.
- La translation de vecteur d'affixe u s'écrit $z' = z + u$.
- La rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle θ s'écrit $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.
- L'homothétie de centre Ω et de rapport réel k s'écrit $z' - \omega = k(z - \omega)$.



E

Exemple 7 : un quart de tour

Soit $\Omega(1 + 2i)$ et $M(4 + i)$. Le point M' , image de M par la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$, vérifie $z' - (1 + 2i) = i(3 - i) = 1 + 3i$, donc $z' = 2 + 5i$. On vérifie que $\Omega M = \Omega M' = \sqrt{10}$.

À retenir

- $z = a + ib$, $\bar{z} = a - ib$, $z\bar{z} = |z|^2$; pour diviser, on multiplie par le conjugué.
- $|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'$: produit = module multiplié, arguments additionnés.
- $z = re^{i\theta}$, $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$; Euler : $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$.
- Linéariser : Euler, binôme, regroupement des termes conjugués.
- $z^n = \rho e^{i\alpha}$ a n solutions $\rho^{1/n} e^{i(\alpha+2k\pi)/n}$; la somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle.
- Second degré : $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$ avec $\delta^2 = \Delta$; la rotation s'écrit $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$.

Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Nombres complexes et trigonométrie :
exercices de maths Maths Sup

Nombres complexes et trigonométrie :
contrôle de maths Maths Sup

 **QCM de maths**

Nombres complexes et trigonométrie :
QCM de maths Maths Sup

 **Exercices de maths**

Applications et relations : exercices de
maths Maths Sup

 **Exercices de maths**

Suites réelles et complexes : exercices de
maths Maths Sup

 **Contrôles de maths**

Applications et relations : contrôle de
maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage