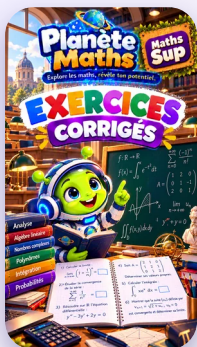


Nombres complexes et trigonométrie : exercices corrigés de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Opérations de base



a) $z_1 + z_2 = 4 + 2i$ et $z_1 - z_2 = 2 - 6i$.

b) $z_1 z_2 = 3 + 12i - 2i - 8i^2 = 11 + 10i$.

c) On multiplie par le conjugué $1 - 4i$:

$$\frac{(3 - 2i)(1 - 4i)}{1 + 16} = \frac{3 - 12i - 2i - 8}{17} = \frac{-5 - 14i}{17}.$$

2 Puissances de i



- a) $2027 = 4 \times 506 + 3$, donc $i^{2027} = i^3 = -i$.
- b) $(1 + i)^2 = 2i$, donc $(1 + i)^8 = (2i)^4 = 16i^4 = 16$.
- c) $i^{-5} = \frac{1}{i^5} = \frac{1}{i} = -i$.

3 Calculs de modules



- a) $\sqrt{9 + 16} = 5$. b) $\sqrt{25 + 144} = 13$. c) $\sqrt{1 + 3} = 2$.
- d) $|2 + i| |3 - 4i| = \sqrt{5} \times 5 = 5\sqrt{5}$.
- e) $\frac{|1 + i|}{|1 - i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$.

4 Partie réelle et imaginaire



$$z = \frac{(2 + 3i)(1 + i)}{2} = \frac{2 + 2i + 3i - 3}{2} = \frac{-1 + 5i}{2}.$$

$$\text{Donc } \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}, \operatorname{Im}(z) = \frac{5}{2} \text{ et } \bar{z} = \frac{-1 - 5i}{2}.$$

$$\text{Vérification : } |z|^2 = \frac{1 + 25}{4} = \frac{13}{2} \text{ et } \frac{|2 + 3i|^2}{|1 - i|^2} = \frac{13}{2}. \text{ Les deux valeurs coïncident.}$$

5 Premières formes exponentielles



- a) Module $\sqrt{2}$, $\cos \theta = \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = \frac{\pi}{4}$: $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.
- b) Module 2, $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \theta = \frac{1}{2}$, donc $\theta = \frac{5\pi}{6}$: $-\sqrt{3} + i = 2e^{i5\pi/6}$.
- c) Module 2, $\cos \theta = 0$, $\sin \theta = -1$, donc $\theta = -\frac{\pi}{2}$: $-2i = 2e^{-i\pi/2}$.

6 Vrai ou faux ?



- a) Faux : $z = 1$, $z' = -1$ donnent $0 \neq 2$.
- b) Vrai : propriété du conjugué d'un produit.
- c) Vrai : $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$.
- d) Vrai : $|\cos \theta + i \sin \theta|^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.
- e) Faux : $z = -2i$ convient aussi, car $(-2i)^2 = -4$.

7 Une équation avec conjugué



On pose $z = x + iy$. L'équation devient $2x + 2iy + i = 3x - 3iy - 4$.

Parties réelles : $2x = 3x - 4$, donc $x = 4$. Parties imaginaires : $2y + 1 = -3y$, donc $y = -\frac{1}{5}$.

Solution : $z = 4 - \frac{i}{5}$. Vérification : $2z + i = 8 + \frac{3i}{5}$ et $3\bar{z} - 4 = 8 + \frac{3i}{5}$.

8 Deux grandes puissances



a) $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$, donc $(1 + i\sqrt{3})^6 = 64e^{i2\pi} = 64$.

b) $\sqrt{3} - i = 2e^{-i\pi/6}$, donc $(\sqrt{3} - i)^{10} = 1024e^{-i5\pi/3} = 1024e^{i\pi/3}$ car $-\frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{\pi}{3}$.

Ainsi le résultat est $1024 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 512 + 512\sqrt{3}i$.

9

Formules de Moivre pour $3x$

★★★

D'après Moivre,

$$\cos 3x + i \sin 3x = (\cos x + i \sin x)^3 = \cos^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - i \sin^3 x$$

.

Partie réelle : $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$.

Partie imaginaire : $\sin 3x = 3(1 - \sin^2 x) \sin x - \sin^3 x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

10

Deux linéarisations

★★★

a)

$$\cos^4 x = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^4}{16} = \frac{e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16} = \frac{2 \cos 4x + 8 \cos 2x + 6}{16} =$$

.

b)

$$\sin^3 x = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^3}{(2i)^3} = \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} = \frac{2i \sin 3x - 6i \sin x}{-8i} = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$$

.

11

Racines cubiques de l'unité

★★★

a) $j^3 = 1$ et $j \neq 1$, donc $0 = j^3 - 1 = (j - 1)(1 + j + j^2)$ impose $1 + j + j^2 = 0$. On en déduit $1 + j = -j^2$.

b) $(1 + j)^9 = (-j^2)^9 = -j^{18} = -(j^3)^6 = -1$.

c) $2026 = 3 \times 675 + 1$, donc $j^{2026} = (j^3)^{675} j = j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

12 Un trinôme à coefficients complexes



$\Delta = (3 + i)^2 - 4(4 + 3i) = 8 + 6i - 16 - 12i = -8 - 6i$. Comme $(1 - 3i)^2 = 1 - 6i - 9 = -8 - 6i$, on prend $\delta = 1 - 3i$.

$$z = \frac{3 + i \pm (1 - 3i)}{2}, \text{ soit } z = 2 - i \text{ ou } z = 1 + 2i.$$

Contrôle : la somme vaut $3 + i$ et le produit $(2 - i)(1 + 2i) = 4 + 3i$.

13 Une racine carrée complexe



On a $|-5 + 12i| = 13$. Le système $x^2 - y^2 = -5$, $x^2 + y^2 = 13$, $2xy = 12$ donne $x^2 = 4$ et $y^2 = 9$.

Comme $xy = 6 > 0$, x et y ont le même signe : $z = 2 + 3i$ ou $z = -2 - 3i$.

Vérification : $(2 + 3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$.

14 Image par une rotation



L'écriture complexe est $z_N - \omega = e^{-i\pi/2}(z_M - \omega) = -i(3 - i) = -3i + i^2 = -1 - 3i$.

Donc $z_N = 1 + 2i - 1 - 3i = -i$.

Vérification : $\Omega M = |3 - i| = \sqrt{10}$ et $\Omega N = |-1 - 3i| = \sqrt{10}$.

15 Lieux géométriques



a) Avec $z = x + iy$: $x^2 + (y - 1)^2 = (x + 2)^2 + y^2$, soit $-2y + 1 = 4x + 4$, c'est-à-dire $4x + 2y + 3 = 0$. C'est la médiatrice du segment joignant $A(i)$ et $B(-2)$.

b) $|z - (1 - i)| = 3$ signifie que la distance de M au point d'affixe $1 - i$ vaut 3 : c'est le cercle de centre $(1, -1)$ et de rayon 3 .

16 Un triangle équilatéral ?



a) $c - a = 2 + 2\sqrt{3}i$ et $b - a = 4$, donc $\frac{c - a}{b - a} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$.

b) Le module vaut 1 : $AC = AB$. L'argument vaut $\frac{\pi}{3}$: l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 60° . Un triangle isocèle ayant un angle de 60° est équilatéral. Le périmètre est $3 \times AB = 3 \times 4 = 12$.

17 Inverse et puissance d'un complexe



a) Pour $z \neq 0$, l'équation équivaut à $z^2 - z + 1 = 0$, de discriminant $\Delta = -3$, donc $z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\pi/3}$.

b) Pour $z = e^{i\pi/3}$, $z^3 = e^{i\pi} = -1$, donc $z^6 = 1$. Or $2026 = 6 \times 337 + 4$, donc $z^{2026} = z^4 = e^{i4\pi/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

18 Les six racines de -64



$-64 = 64e^{i\pi}$, donc $z_k = 2e^{i(\pi/6 + k\pi/3)}$ pour $k = 0, \dots, 5$.

$z_0 = \sqrt{3} + i$; $z_1 = 2i$; $z_2 = -\sqrt{3} + i$; $z_3 = -\sqrt{3} - i$; $z_4 = -2i$; $z_5 = \sqrt{3} - i$.

Les six points sont sur le cercle de centre O et de rayon 2, séparés par des angles de $\frac{\pi}{3}$: ils forment un hexagone régulier. Contrôle : $(2i)^6 = 64i^6 = -64$.

19 Une somme binomiale trigonométrique

★★★★

a) $1 + e^{ix} = e^{ix/2}(e^{-ix/2} + e^{ix/2}) = 2 \cos \frac{x}{2} e^{ix/2}.$

b) Par le binôme, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ikx} = (1 + e^{ix})^n = 2^n \cos^n \frac{x}{2} e^{inx/2}.$ S en est la partie réelle :
 $S = 2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{nx}{2}.$

c) $S = 16 \cos^4 \frac{\pi}{4} \cos \pi = 16 \times \frac{1}{4} \times (-1) = -4.$ Directement :
 $1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 6 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = -4.$

20 Valeur exacte de $\cos(2\pi/5)$

★★★★

a) $\omega^5 = 1$ et $\omega \neq 1$, donc $(\omega - 1)(1 + \omega + \dots + \omega^4) = 0$ impose la somme nulle.

b) $\omega^4 = \bar{\omega}$ et $\omega^3 = \bar{\omega}^2$. Donc $1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5} = 0.$ Avec $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$:
 $\cos \frac{4\pi}{5} = 2c^2 - 1$, d'où $1 + 2c + 4c^2 - 2 = 0$, soit $4c^2 + 2c - 1 = 0.$

c) $\Delta = 4 + 16 = 20$, donc $c = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8}.$ Comme $\frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}, c > 0 : c = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$

21 Une équation à homographie

★★★★

$\omega^3 = 1$ donne $\omega \in \{1, j, j^2\}$ avec $j = e^{2i\pi/3}.$ Or $\omega = 1$ est impossible, car $z + i = z - i$ n'a pas de solution.

Pour $\omega \neq 1 : z + i = \omega z - \omega i$, donc $z = -i \frac{1 + \omega}{1 - \omega}.$

Avec $\omega = e^{2i\pi/3} : \frac{1 + \omega}{1 - \omega} = \frac{e^{-i\pi/3} + e^{i\pi/3}}{e^{-i\pi/3} - e^{i\pi/3}} = \frac{2 \cos(\pi/3)}{-2i \sin(\pi/3)} = \frac{i}{\sqrt{3}},$ donc $z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$ Avec

$\omega = \bar{j}$, on obtient le conjugué du quotient, donc $z = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$

Solutions : $z = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Nombres complexes et trigonométrie :
exercices de maths Maths Sup

QCM de maths

Nombres complexes et trigonométrie :
QCM de maths Maths Sup

Contrôles de maths

Nombres complexes et trigonométrie :
contrôle de maths Maths Sup

Exercices de maths

Applications et relations : exercices de
maths Maths Sup

 Exercices de maths

Suites réelles et complexes : exercices de maths Maths Sup

 QCM de maths

Applications et relations : QCM de maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage