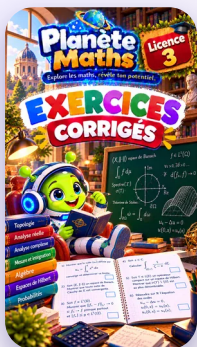


Mesure et intégrale de Lebesgue : exercices de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

21 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Mesures d'intervalles

★ ★ ★

Calculer $\lambda([2, 5] \cup]7, 9[)$ puis $\lambda(\{1, 2, 3\})$ et $\lambda(\mathbb{N})$.

2 Tribu engendrée

★ ★ ★

Sur $X = \{1, 2, 3, 4\}$, déterminer la tribu engendrée par $\mathcal{A} = \{1, 2\}$.

3 Combinaison de mesures de Dirac

★ ★ ★

Soit $\mu = 3\delta_1 + 2\delta_4$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $\mu([0, 2])$, $\mu([1, 4])$, $\mu(]1, 4[)$ et $\mu(\mathbb{R})$.

4 Intégrale d'une fonction étagée



Calculer $\int f d\lambda$ pour $f = 2 \cdot \mathbf{1}_{[0,1[} + 5 \cdot \mathbf{1}_{[1,4[} + 3 \cdot \mathbf{1}_{[4,6]}$.

5 Rationnels et intégrale



Calculer $\int_{[0,1]} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} d\lambda$ puis $\int_{[0,1]} (x + \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)) d\lambda(x)$.

6 Égalité presque partout



Soit $f(x) = x^2$ sauf aux points $0, \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ où f vaut 7. Calculer $\int_{[0,1]} f d\lambda$.

7 Vrai ou faux ?



Dire si chaque affirmation est vraie ou fausse en justifiant. (a) Toute réunion dénombrable de parties négligeables est négligeable. (b) $\lambda(]0, 1]) = \lambda([0, 1])$. (c) Toute fonction Lebesgue-intégrable sur $]0, 1]$ est bornée.

8 Continuité des mesures



(a) Pour $A_n = [0, 1 - \frac{1}{n}]$ ($n \geq 2$), calculer $\lambda(\bigcup A_n)$ et $\lim \lambda(A_n)$. (b) Pour $B_n = [n, +\infty[$, comparer $\lambda(\bigcap B_n)$ et $\lim \lambda(B_n)$. Que constater ?

9 Un ouvert dense de petite mesure



On numérote $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_1, q_2, \dots\}$ et on pose $O = \bigcup_{k \geq 1}]q_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, q_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}[$ avec $\varepsilon = 0,1$. Montrer que $\lambda(O) \leq 0,1$, que O contient les rationnels de $[0, 1]$, et que $[0, 1] \setminus O$ n'est pas négligeable.

10 Fonction partie entière



Montrer que $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est mesurable et calculer $\int_{[0,3[} \lfloor x \rfloor d\lambda$.

11 Convergence monotone et puissance



Calculer $\int_{]0,1]} x^{-1/3} d\lambda$ en utilisant $f_n = x^{-1/3} \mathbf{1}_{[1/n,1]}$.

12 Intégration terme à terme d'une série



Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, valeur égale à $\frac{\pi^2}{6}$ (admise pour la somme).

13 Limite d'une intégrale sur [0,1]



Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx$.

14 Fatou et masse qui s'échappe



Soit $f_n = \mathbf{1}_{[n,n+1]}$. Calculer $\int f_n$, $\liminf f_n$ et vérifier Fatou. Le théorème de convergence dominée s'applique-t-il ?

15 Convergence dominée avec un sinus



Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x(1+x^2)} dx$.

16 La limite de $(1 - x/n)^n$

★★★★

Soit $f_n(x) = (1 - \frac{x}{n})^n \mathbf{1}_{[0,n]}(x)$. Montrer que $\int_0^{+\infty} f_n \rightarrow 1$ par convergence dominée, puis vérifier avec le calcul exact.

17 Pas de domination possible

★★★★

Soit $f_n = n \mathbf{1}_{]0,1/n[}$ sur $]0,1]$. Montrer que $\sup_n f_n$ n'est pas intégrable ; conclure sur l'usage de la convergence dominée.

18 Un ensemble de Cantor de mesure positive

★★★★

À l'étape $n \geq 1$, on retire de chaque intervalle restant un intervalle ouvert central de sorte que l'on retire en tout 2^{n-1} intervalles de longueur 4^{-n} (on admet que cela reste possible). Calculer la mesure de l'ensemble K obtenu. Peut-il contenir un intervalle ?

19 Fatou et suites bornées en intégrale

★★★★

Soit $f_n \geq 0$ mesurables avec $f_n \rightarrow f$ presque partout et $\int f_n \leq M$ pour tout n . Montrer que $\int f \leq M$. Application : $f_n(x) = (n+1)x^n$ sur $[0,1]$.

20 Mesure à densité

★★★★

Pour $A \in \mathcal{B}([0,1])$, on pose $\nu(A) = \int_A 2x d\lambda(x)$. Montrer que ν est une mesure, puis calculer $\nu([0,1])$, $\nu([0, \frac{1}{2}])$ et $\nu(\{x\})$.

21 Riemann impropre et Lebesgue

★★★★

Montrer que $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas Lebesgue-intégrable sur $]0, +\infty[$, alors que son intégrale de Riemann impropre converge (vers $\pi/2$, admis).

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

Exercices corrigés de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue :
exercices corrigés de maths Licence L3

Cours de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue : cours
de maths Licence L3

QCM de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue : QCM
de maths Licence L3

Exercices corrigés de maths

Intégrales à paramètres et Fubini :
exercices corrigés de maths Licence L3

✓ **Exercices corrigés de maths**

Espaces L_p et espaces de Hilbert :
exercices corrigés de maths Licence L3

■ **Cours de maths**

Intégrales à paramètres et Fubini : cours
de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage