

Mesure et intégrale de Lebesgue : cours de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

L'intégrale de Riemann découpe l'axe des abscisses en petits intervalles ; celle de Lebesgue découpe l'axe des valeurs et mesure la taille des ensembles où la fonction prend ces valeurs. Ce changement de point de vue donne une théorie où les limites passent sous le signe intégrale dans des conditions très larges. Ce chapitre construit les outils nécessaires : tribus, mesures, fonctions mesurables, puis les trois grands théorèmes de convergence.

1. Tribus et mesures

D Tribu

Soit X un ensemble. Une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ est une **tribu** si $X \in \mathcal{A}$, si $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable. Le couple $(X, \mathcal{A})$ est un espace mesurable ; les éléments de $\mathcal{A}$ sont les parties mesurables.

Une tribu est donc aussi stable par intersection dénombrable (loi de De Morgan) et contient $\emptyset$.
 Pour toute famille $\mathcal{C}$ de parties, il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$: la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{C})$.
 La tribu **borélienne** $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les intervalles ouverts ; elle contient les ouverts, les fermés, les singletons et toutes les parties dénombrables.

D Mesure

Une **mesure** sur $(X, \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et, pour toute suite (A_k) de parties mesurables deux à deux disjointes,

$$\mu\left(\bigsqcup_{k \geq 0} A_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k).$$

Deux exemples de base : la mesure de comptage (le nombre d'éléments) et la mesure de Dirac δ_a , qui vaut 1 sur les parties contenant a et 0 sinon.

P Propriétés d'une mesure

Pour des parties mesurables : (i) si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$; (ii) $\mu(\bigcup_k A_k) \leq \sum_k \mu(A_k)$; (iii) si $A_k \subset A_{k+1}$, alors $\mu(\bigcup_k A_k) = \lim_k \mu(A_k)$; (iv) si $A_{k+1} \subset A_k$ et $\mu(A_0) < +\infty$, alors $\mu(\bigcap_k A_k) = \lim_k \mu(A_k)$.

Démonstration de (iii) : on pose $B_0 = A_0$ et $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$. Les B_k sont disjoints, $A_n = \bigsqcup_{k \leq n} B_k$ et $\bigcup A_k = \bigsqcup B_k$; la σ -additivité donne le résultat en faisant tendre n vers l'infini.

2. La mesure de Lebesgue

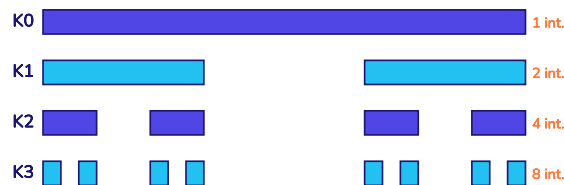
P Théorème (admis)

Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\lambda([a, b]) = b - a$ pour tous réels $a < b$.

Une partie dénombrable $\{x_0, x_1, \dots\}$ est donc de mesure nulle, par σ -additivité : $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$. Il n'est pourtant pas vrai que « mesure nulle » signifie « dénombrable », comme le montre l'exemple suivant. On sait aussi, grâce à l'axiome du choix, qu'il existe des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas mesurables : la mesure de Lebesgue ne peut pas être définie sur toutes les parties tout en restant σ -additive et invariante par translation.

E Exemple 1 : l'ensemble de Cantor est négligeable

On pose $K_0 = [0, 1]$. À chaque étape, on retire le tiers central ouvert de chaque intervalle : K_n est une réunion de 2^n intervalles de longueur 3^{-n} , donc $\lambda(K_n) = (2/3)^n$. L'ensemble $K = \bigcap_n K_n$ est l'ensemble de Cantor. Comme la suite (K_n) est décroissante et $\lambda(K_0) = 1 < +\infty$, la propriété (iv) donne $\lambda(K) = \lim_n (2/3)^n = 0$. Pourtant K n'est pas dénombrable.



3. Fonctions mesurables

D Fonction mesurable

Une application $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ est **mesurable** si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout borélien B .

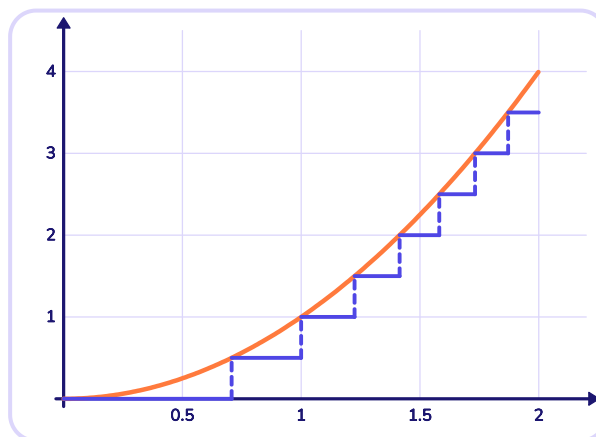
Il suffit de vérifier que $\{f > a\} = \{x : f(x) > a\}$ est mesurable pour tout réel a .

Les fonctions continues sont mesurables pour la tribu borélienne. La somme, le produit, le maximum de deux fonctions mesurables le sont encore, ainsi que $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup f_n$ et $\liminf f_n$; en particulier, **une limite simple de fonctions mesurables est mesurable**. Une fonction **étagée** est une combinaison finie $\varphi = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{1}_{A_i}$ avec A_i mesurables.

P Approximation par des fonctions étagées

Toute fonction mesurable $f \geq 0$ est limite simple d'une suite *croissante* de fonctions étagées positives, par exemple $\varphi_n = \min(n, 2^{-n} \lfloor 2^n f \rfloor)$.

La figure ci-dessous illustre l'idée : on découpe l'axe des valeurs en tranches et, sur l'ensemble où f se trouve dans une tranche, on remplace f par la valeur basse de la tranche.



4. L'intégrale de Lebesgue

Pour une fonction étagée positive $\varphi = \sum a_i \mathbf{1}_{A_i}$, on pose $\int \varphi d\mu = \sum_i a_i \mu(A_i)$, avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$. Pour une fonction mesurable $f \geq 0$,

$\int f d\mu = \sup \left\{ \int \varphi d\mu : \varphi \text{ étagée, } 0 \leq \varphi \leq f \right\} \in [0, +\infty]$. Enfin, f de signe quelconque est dite **intégrable** si $\int |f| d\mu < +\infty$ et l'on pose $\int f = \int f^+ - \int f^-$ avec $f^\pm = \max(\pm f, 0)$.

P Propriétés

L'intégrale est linéaire sur l'espace des fonctions intégrables, croissante ($f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$) et vérifie $|\int f| \leq \int |f|$.

E Exemple 2 : intégrale d'une fonction étagée

Soit $f = 4 \cdot \mathbf{1}_{[0,2[} + 7 \cdot \mathbf{1}_{[2,3]}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. Alors

$$\int f d\lambda = 4\lambda([0, 2]) + 7\lambda([2, 3]) = 4 \times 2 + 7 \times 1 = 15.$$

Comparaison avec Riemann : toute fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$ est Lebesgue-intégrable avec la même intégrale, mais la réciproque est fausse.

Fonction sur $[0, 1]$	Riemann	Lebesgue
$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$	non intégrable	intégrable, $\int = 0$
$x \mapsto x^{-1/2}$ sur $]0, 1]$	impropre (non bornée)	intégrable, $\int = 2$
$x \mapsto x^2$	intégrable, $\int = \frac{1}{3}$	intégrable, $\int = \frac{1}{3}$

5. Ensembles négligeables et « presque partout »

D Partie négligeable

Une partie N est **négligeable** si elle est contenue dans un ensemble mesurable de mesure nulle. Une propriété est vraie **presque partout** (p.p.) si l'ensemble des points où elle est fautive est négligeable.

Une réunion dénombrable de parties négligeables est négligeable (sous-additivité). Si $f = g$ presque partout, alors $\int f = \int g$: modifier une fonction sur un ensemble négligeable ne change pas son intégrale. Enfin, si $f \geq 0$ et $\int f d\mu = 0$, alors $f = 0$ presque partout.

E Exemple 3 : une intégrale calculée en ignorant les rationnels

Soit $g(x) = x^3$ si $x \notin \mathbb{Q}$ et $g(x) = 0$ si $x \in \mathbb{Q}$, sur $[0, 1]$. Comme $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$, $g = x^3$ presque partout et $\int_{[0,1]} g d\lambda = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$.

⚠ Attention

Un ensemble de mesure nulle peut être très gros (Cantor) et un ensemble dense peut avoir une mesure arbitrairement petite. La mesure ne mesure pas la « densité » topologique.

6. Théorème de convergence monotone

P Convergence monotone (Beppo Levi)

Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables positives, croissante, qui converge simplement (p.p.) vers f , alors

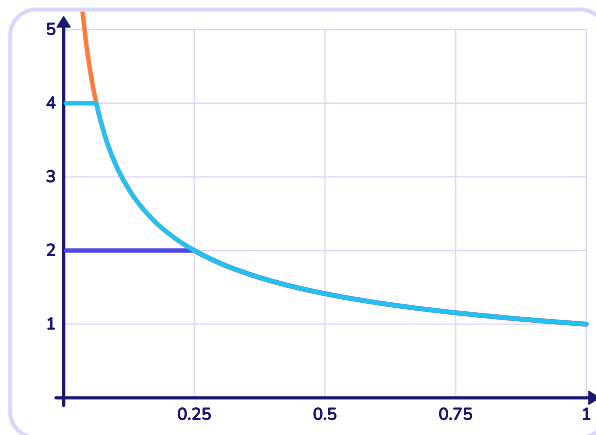
$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \quad (\text{dans } [0, +\infty]).$$

Aucune hypothèse d'intégrabilité n'est requise : la limite peut valoir $+\infty$. Une conséquence très utile : pour des fonctions positives, **on peut intégrer une série terme à terme**, $\int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$.

E Exemple 4 : $\int_0^1 x^{-1/2} dx$

Posons $f_n(x) = \min(\sqrt{n}, x^{-1/2})$ sur $]0, 1]$. La suite est croissante, positive, de limite $f(x) = x^{-1/2}$. On calcule

$$\int f_n = \sqrt{n} \cdot \frac{1}{n} + \int_{1/n}^1 x^{-1/2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} + 2 - \frac{2}{\sqrt{n}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 2. \text{ Donc } \int_{]0,1]} x^{-1/2} d\lambda = 2.$$



7. Lemme de Fatou

P Lemme de Fatou

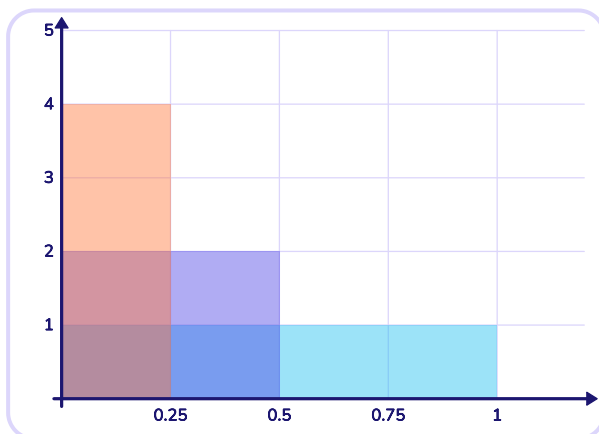
Pour toute suite (f_n) de fonctions mesurables positives,

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Idée de la preuve : on pose $g_k = \inf_{n \geq k} f_n$. La suite (g_k) est croissante, de limite $\liminf f_n$, et $g_k \leq f_n$ pour $n \geq k$, donc $\int g_k \leq \inf_{n \geq k} \int f_n$. On conclut avec la convergence monotone.

⚠ L'inégalité peut être stricte

Soit $f_n = n \mathbf{1}_{]0, 1/n[}$. Pour tout n , $\int f_n = 1$, mais $f_n(x) \rightarrow 0$ pour chaque x : l'intégrale de la limite vaut 0 et $0 < 1$. La masse « s'échappe » vers un point.



8. Théorème de convergence dominée

P Convergence dominée (Lebesgue)

Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables qui converge simplement presque partout vers f . S'il existe g **intégrable** telle que $|f_n| \leq g$ presque partout pour tout n , alors f est intégrable, $\int |f_n - f| d\mu \rightarrow 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

M Méthode

1. Identifier la limite simple $f(x) = \lim f_n(x)$ pour presque tout x .
2. Trouver une fonction dominante g , *indépendante de n* , et vérifier que $\int g < +\infty$.
3. Conclure que $\lim \int f_n = \int f$, puis calculer $\int f$.

E Exemple 5 : $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos(x/n) dx$

Pour tout x , $\cos(x/n) \rightarrow 1$, donc $f_n(x) \rightarrow e^{-x}$. De plus $|f_n(x)| \leq e^{-x}$, fonction intégrable d'intégrale 1. Ainsi $I_n \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$. (Le calcul direct donne

$$I_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}, \text{ ce qui confirme.)}$$



Le conseil de Zyro

Sur ma planète, on dit : « une suite sans plafond commun peut s'envoler ». Si tu ne trouves pas de fonction dominante, cherche un contre-exemple de type « bosse qui s'échappe » comme dans le lemme de Fatou.

À retenir

- Une tribu est stable par complémentaire et réunion dénombrable ; une mesure est σ -additive.
- $\lambda([a, b]) = b - a$; les parties dénombrables et l'ensemble de Cantor sont négligeables.
- Une limite simple de fonctions mesurables est mesurable ; toute $f \geq 0$ mesurable est limite croissante de fonctions étagées.
- Deux fonctions égales presque partout ont la même intégrale.
- Convergence monotone : suite positive croissante, aucune hypothèse d'intégrabilité.
- Fatou : $\int \liminf f_n \leq \liminf \int f_n$, inégalité souvent stricte.
- Convergence dominée : il faut une domination *uniforme en n* par une fonction intégrable.

Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)



Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue :
exercices de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue :
contrôle de maths Licence L3

 QCM de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue : QCM
de maths Licence L3

 Exercices de maths

Intégrales à paramètres et Fubini :
exercices de maths Licence L3

 Exercices de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert :
exercices de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Intégrales à paramètres et Fubini :
contrôle de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage