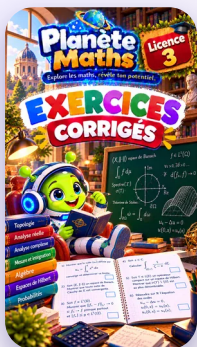


Mesure et intégrale de Lebesgue : exercices corrigés de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Mesures d'intervalles



Les deux intervalles sont disjoints, donc par additivité $\lambda([2, 5] \cup]7, 9]) = 3 + 2 = 5$. Les singletons sont de mesure nulle : $\lambda(\{1, 2, 3\}) = 0$. Enfin $\mathbb{N}$ est dénombrable, donc $\lambda(\mathbb{N}) = 0$.

2 Tribu engendrée



La tribu doit contenir $\emptyset$, X , A et le complémentaire $A^c = \{3, 4\}$. Cette famille $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{3, 4\}, X\}$ est stable par complémentaire et réunion, c'est donc la plus petite tribu cherchée : elle a 4 éléments.

3 Combinaison de mesures de Dirac



$\mu(A) = 3 \mathbf{1}_A(1) + 2 \mathbf{1}_A(4)$. On obtient $\mu([0, 2]) = 3$ (seul 1 y est), $\mu([1, 4]) = 3 + 2 = 5$, $\mu([1, 4]) = 0$ (ni 1 ni 4) et $\mu(\mathbb{R}) = 5$.

4 Intégrale d'une fonction étagée



$$\int f d\lambda = 2\lambda([0, 1]) + 5\lambda([1, 4]) + 3\lambda([4, 6]) = 2 \times 1 + 5 \times 3 + 3 \times 2 = 2 + 15 + 6 = 23$$

5 Rationnels et intégrale



$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ est étagée et $\int \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} = \lambda(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$. Par linéarité, $\int (x + \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}) = \int_0^1 x dx + 0 = \frac{1}{2}$.

6 Égalité presque partout



L'ensemble $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ est fini donc négligeable : $f = x^2$ presque partout. Ainsi $\int_{[0,1]} f d\lambda = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

7 Vrai ou faux ?



(a) Vrai : sous-additivité, $\lambda(\bigcup N_k) \leq \sum 0 = 0$. (b) Vrai : les deux bornes sont des singletons de mesure nulle. (c) Faux : $x^{-1/2}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (intégrale 2) mais non bornée.

8 Continuité des mesures



(a) La suite est croissante, de réunion $[0, 1[$; $\lambda([0, 1]) = 1$ et $\lambda(A_n) = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$: égalité.
(b) Suite décroissante, $\bigcap B_n = \emptyset$ donc $\lambda(\bigcap B_n) = 0$, alors que $\lambda(B_n) = +\infty$ pour tout n : les deux valeurs diffèrent. L'hypothèse $\mu(B_0) < +\infty$ de la propriété (iv) est indispensable.

9 Un ouvert dense de petite mesure



Le k -ième intervalle a pour longueur $\varepsilon/2^k$. Par sous-additivité,

$\lambda(O) \leq \sum_{k \geq 1} \varepsilon/2^k = \varepsilon = 0,1$. Chaque q_k est le centre de son intervalle, donc

$O \supset \mathbb{Q} \cap [0, 1]$: O est dense dans $[0, 1]$. Enfin $\lambda([0, 1] \setminus O) \geq 1 - 0,1 = 0,9 > 0$: ce fermé relatif est donc de mesure strictement positive, et il ne contient aucun intervalle.

10 Fonction partie entière



Sur $[0, 3[$, $\lfloor x \rfloor = 0 \cdot \mathbf{1}_{[0,1[} + 1 \cdot \mathbf{1}_{[1,2[} + 2 \cdot \mathbf{1}_{[2,3[}$: c'est une fonction étagée, donc mesurable. Son intégrale vaut $0 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 1 = 3$.

11 Convergence monotone et puissance



La suite (f_n) est positive, croissante, de limite $x^{-1/3}$ sur $]0, 1]$. On a

$$\int f_n = \int_{1/n}^1 x^{-1/3} dx = \frac{3}{2} (1 - n^{-2/3}) \rightarrow \frac{3}{2}. \text{ Par convergence monotone, } \int_{]0,1]} x^{-1/3} d\lambda = \frac{3}{2}.$$

12 Intégration terme à terme d'une série



Pour $x > 0$, $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{xe^{-x}}{1 - e^{-x}} = \sum_{n \geq 1} xe^{-nx}$. Les termes sont positifs : la convergence monotone (version série) autorise l'échange. Or $\int_0^{+\infty} xe^{-nx} dx = \frac{1}{n^2}$ (intégration par parties). Donc l'intégrale vaut $\sum_{n \geq 1} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,645$.

13 Limite d'une intégrale sur $[0,1]$



Pour $x \in [0, 1]$, $(1 + \frac{x}{n})^n \rightarrow e^x$. Domination : $1 + t \leq e^t$ donne $(1 + \frac{x}{n})^n \leq e^x \leq e$, constante intégrable sur $[0, 1]$. Par convergence dominée, la limite vaut $\int_0^1 e^x dx = e - 1$.

14 Fatou et masse qui s'échappe

★★★

$\int f_n = 1$. Pour tout x , $f_n(x) = 0$ dès que $n > x$: $\liminf f_n = 0$, d'intégrale 0. Fatou donne $0 \leq 1$, inégalité stricte. Une domination $g \geq f_n$ imposerait $g \geq 1_{[1,+\infty[}$, dont l'intégrale est infinie : pas de fonction dominante intégrable, le théorème ne s'applique pas.

15 Convergence dominée avec un sinus

★★★★

Pour $x > 0$, $\frac{n \sin(x/n)}{x} \rightarrow 1$ (limite de $\sin t/t$ en 0 avec $t = x/n$). Domination : $|\sin t| \leq |t|$ donne $\left| \frac{n \sin(x/n)}{x} \right| \leq 1$, donc l'intégrande est majoré par $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, intégrable sur $]0, +\infty[$ (intégrale $\pi/2$). La limite vaut $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

16 La limite de $(1 - x/n)^n$

★★★★

Pour x fixé, $f_n(x) \rightarrow e^{-x}$. Pour $0 \leq x \leq n$, $0 \leq 1 - \frac{x}{n} \leq e^{-x/n}$ donc $0 \leq f_n(x) \leq e^{-x/n}$, intégrable d'intégrale 1. Conclusion : $\int f_n \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$. Vérification : $\int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n dx = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$.

17 Pas de domination possible

★★★★

Sur $] \frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} [$, $f_n(x) = n$ si $n < 1/x$, c'est-à-dire pour $n \leq k$: $\sup_n f_n = k$ presque partout sur cet intervalle. Donc $\int \sup_n f_n \geq \sum_{k \geq 1} k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k+1} = +\infty$. Toute fonction dominante serait $\geq \sup_n f_n$, donc non intégrable : le théorème ne s'applique pas, et d'ailleurs $\int f_n = 1 \nrightarrow 0$.

18 Un ensemble de Cantor de mesure positive

★★★★

La mesure retirée est $\sum_{n \geq 1} 2^{n-1} 4^{-n} = \sum_{n \geq 1} 2^{-n-1} = \frac{1}{2}$. Comme

$K = [0, 1] \setminus \bigcup (\text{intervalles retirés})$, $\lambda(K) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0$. K ne contient aucun

intervalle : à chaque étape on retire un morceau au milieu de chaque intervalle restant, dont les longueurs tendent vers 0. C'est un fermé de mesure positive d'intérieur vide.

19 Fatou et suites bornées en intégrale

★★★★

Presque partout, $f = \lim f_n = \liminf f_n$. Le lemme de Fatou donne

$\int f \leq \liminf \int f_n \leq M$. Application : $\int_0^1 (n+1)x^n dx = 1 = M$, et $f_n(x) \rightarrow 0$ pour $x < 1$, donc $f = 0$ presque partout et $\int f = 0 \leq 1$. Ici l'inégalité est stricte, il n'y a pas convergence des intégrales.

20 Mesure à densité

★★★★

$\nu(\emptyset) = 0$. Si $A = \bigsqcup A_k$, alors $\mathbf{1}_A 2x = \sum_k \mathbf{1}_{A_k} 2x$ avec des termes positifs, et la convergence monotone (version série) donne $\nu(A) = \sum_k \nu(A_k)$: ν est σ -additive. Valeurs : $\nu([0, 1]) = \int_0^1 2x dx = 1$; $\nu([0, \frac{1}{2}]) = \frac{1}{4}$; $\nu(\{x\}) = 0$ car $\lambda(\{x\}) = 0$. ν est une mesure de probabilité.

21 Riemann impropre et Lebesgue

★★★★

Sur $[k\pi, (k+1)\pi]$, $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{(k+1)\pi}$ et $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x| dx = 2$, donc

$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{2}{(k+1)\pi}$. En sommant sur k , la série harmonique diverge :

$\int_{0, +\infty[} \left| \frac{\sin x}{x} \right| d\lambda = +\infty$. La fonction n'est pas Lebesgue-intégrable, bien que l'intégrale impropre converge (par oscillations).

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue :
exercices de maths Licence L3

QCM de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue : QCM
de maths Licence L3

Contrôles de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue :
contrôle de maths Licence L3

Exercices de maths

Intégrales à paramètres et Fubini :
exercices de maths Licence L3

 Exercices de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert :
exercices de maths Licence L3

 QCM de maths

Intégrales à paramètres et Fubini : QCM
de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage