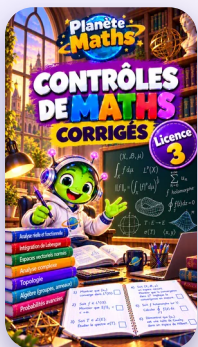


# Mesure et intégrale de Lebesgue : corrigé du contrôle de maths Licence L3 à télécharger en PDF



## Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 52 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigé du contrôle avec le barème détaillé. Compte tes points et repère ce qu'il faut revoir.

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice autorisée seulement quand l'énoncé le précise.

1

### Tribus et mesures

/ 3 pts

(a) Atomes :  $\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}$  (1 pt). Les éléments de  $\mathcal{A}$  sont les réunions d'atomes :  $2^3 = 8$  éléments (0,5 pt). (b)  $\mu(\{b, c\}) = 1$  (0,5 pt),  $\mu(\{d, e\}) = 3$  (0,5 pt),  $\mu(X) = 4 + 1 + 3 = 8$  (0,5 pt).

## 2 Mesure de Lebesgue et ensembles de Cantor

/ 4 pts

(a) À chaque étape, la longueur totale est multipliée par  $\frac{4}{5}$  :  $\lambda(K_n) = (4/5)^n$  (1 pt). La suite est décroissante avec  $\lambda(K_0) < +\infty$  :  $\lambda(K) = \lim (4/5)^n = 0$  (1 pt). (b)  $\lambda(K_3) = \frac{64}{125} = 0,512$  (1 pt). (c)  $\mathbb{Z}$  est dénombrable donc négligeable :  $\lambda([0, 3] \setminus \mathbb{Z}) = 3$  (1 pt).

## 3 Intégrale et ensembles négligeables

/ 4 pts

(a)  $\int f = 3 \times 2 - 1 \times 3 = 3$  (2 pts). (b)  $g = f + 10 \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,5]} - f \mathbf{1}_{\mathbb{Q} \cap [0,5]}$  est somme de fonctions étagées, donc mesurable (1 pt).  $g = f$  presque partout car  $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ , donc  $\int g = 3$  (1 pt).

## 4 Convergence monotone

/ 4 pts

(a)  $\mathbf{1}_{[1/n,1]} \leq \mathbf{1}_{[1/(n+1),1]}$  et  $x^{-1/4} > 0$ , donc croissante ; limite  $x^{-1/4}$  sur  $]0, 1]$  (1 pt). (b)  $\int f_n = \int_{1/n}^1 x^{-1/4} dx = \frac{4}{3} (1 - n^{-3/4})$  (1,5 pt). (c) Par convergence monotone, la limite est  $\frac{4}{3}$  (1,5 pt).

## 5 Convergence dominée

/ 3 pts

Limite simple :  $e^{-3x} e^x = e^{-2x}$  (1 pt). Domination :  $(1 + \frac{x}{n})^n \leq e^x$ , donc l'intégrande est majoré par  $e^{-2x}$ , intégrable (1 pt). Limite =  $\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2}$  (1 pt).

## 6 Lemme de Fatou

/ 2 pts

$\int f_n = 2$ ,  $\liminf f_n = 0$  donc  $\int \liminf f_n = 0 < 2$  : Fatou est strict (1 pt). Une fonction dominante intégrable  $g$  devrait majorer  $\mathbf{1}_{[1,+\infty[}$ , ce qui est impossible : pas de domination (1 pt).

## Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 52 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

### Zyro te conseille la suite

#### Contrôles de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue :  
contrôle de maths Licence L3

#### Cours de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue : cours  
de maths Licence L3

#### QCM de maths

Mesure et intégrale de Lebesgue : QCM  
de maths Licence L3

#### Contrôles de maths

Intégrales à paramètres et Fubini :  
contrôle de maths Licence L3



#### Contrôles de maths

Espaces  $L_p$  et espaces de Hilbert :  
contrôle de maths Licence L3



#### Cours de maths

Intégrales à paramètres et Fubini : cours  
de maths Licence L3

**Zyro vous emmène sur nos sites partenaires**

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage