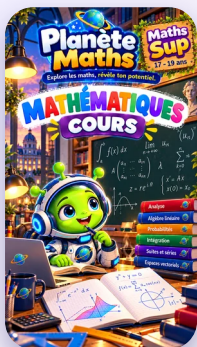


Matrices et déterminants : cours de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Un tableau de nombres peut décrire une rotation, un système d'équations, un réseau de transport ou la transformation d'une image. Les **matrices** donnent à toutes ces situations un même langage de calcul, et le **déterminant** est le nombre qui résume ce qu'une matrice carrée fait subir à l'espace : conserve-t-elle l'information, ou l'écrase-t-elle ? Dans ce chapitre, on construit le calcul matriciel, on le relie aux applications linéaires et aux changements de base, puis on s'en sert pour résoudre des systèmes et décider de l'inversibilité.

1. Le calcul matriciel

D Matrice

Une matrice de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est un tableau $A = (a_{ij})$ de n lignes et p colonnes ; a_{ij} est le coefficient de la ligne i et de la colonne j . L'ensemble de ces matrices se note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quand $n = p$ (matrices carrées).

La somme de deux matrices de même taille et le produit par un scalaire se font **coefficient par coefficient** : $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension np . La vraie nouveauté est le produit.

D Produit matriciel

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, le produit $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ a pour coefficients

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

On multiplie la ligne i de A par la colonne j de B : le nombre de colonnes de A doit être égal au nombre de lignes de B .

B : 3 lignes, 2 colonnes

A : 2 lignes, 3 colonnes

2	1	0
-1	3	4

×

1	-2
0	5
3	1

=

AB : 2 × 2	
2	1
11	21

Case (1, 2) de AB : $2 \times (-2) + 1 \times 5 + 0 \times 1 = 1$

E**Exemple : un produit rectangulaire**

Avec $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, le produit AB est de taille 2×2 :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 11 & 21 \end{pmatrix}, \text{ car par exemple } (AB)_{21} = (-1) \times 1 + 3 \times 0 + 4 \times 3 = 11.$$

Le produit BA existe aussi, mais il est de taille 3×3 : on voit que AB et BA n'ont pas même taille. Pourtant $\text{tr}(AB) = 23 = \text{tr}(BA)$: nous reviendrons sur cette coïncidence.

P**Propriétés du produit**

Quand les tailles le permettent : $(AB)C = A(BC)$; $A(B + C) = AB + AC$;
 $(\lambda A)B = \lambda(AB)$; $I_n A = A = A I_p$, où I_n est la matrice identité. La **transposée** ${}^t A$ échange lignes et colonnes, et ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$: l'ordre est inversé.

A**Le produit n'est pas commutatif**

En général $AB \neq BA$. On peut même avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$.

Conséquences : $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, et l'identité remarquable usuelle n'est valable que si $AB = BA$. On ne « simplifie » jamais par une matrice sans savoir qu'elle est inversible.

Les **puissances** d'une matrice carrée se définissent par $A^0 = I_n$ et $A^{k+1} = A^k A$. Pour une matrice triangulaire supérieure comme $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, une récurrence immédiate donne

$$T^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Matrice d'une application linéaire

D Matrice dans des bases

Soient E et F deux espaces de dimension finie munis de bases $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{C}$, et $f : E \rightarrow F$ linéaire. La matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ dont la **colonne** j contient les coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathcal{C}$.

Si X est la colonne des coordonnées d'un vecteur x dans $\mathcal{B}$, alors la colonne des coordonnées de $f(x)$ dans $\mathcal{C}$ est le produit MX , où M est la matrice de f . Ainsi, **composer** des applications linéaires revient à **multiplier** leurs matrices : $\text{Mat}(g \circ f) = \text{Mat}(g) \text{Mat}(f)$, ce qui explique la définition du produit matriciel.

E Exemple : une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$

Soit $f(x, y, z) = (x + 2y - z, 3x - y + z)$. Dans les bases canoniques, on lit les colonnes en calculant $f(1, 0, 0) = (1, 3)$, $f(0, 1, 0) = (2, -1)$, $f(0, 0, 1) = (-1, 1)$:

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $(1, 1, 2)$ a pour image $(1 + 2 - 2, 3 - 1 + 2) = (1, 4)$, et on retrouve le même résultat avec le produit matriciel.

La matrice dépend des bases choisies : la même application a une infinité de matrices. Savoir en choisir une **simple** est tout l'enjeu de la partie suivante.

3. Changement de base

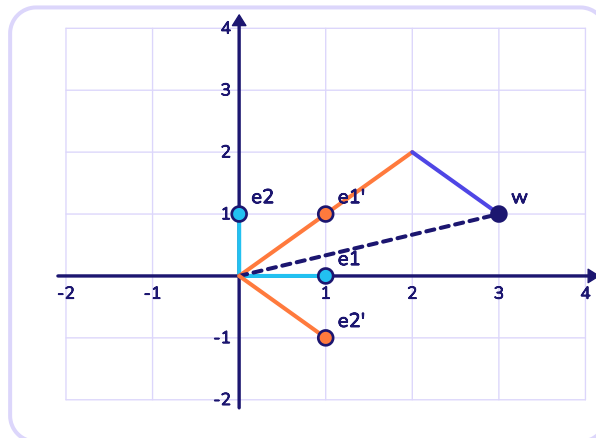
D Matrice de passage

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E . La matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est la matrice dont les colonnes contiennent les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$. Elle est toujours inversible.

P Formules de changement de base

Si X et X' sont les coordonnées d'un même vecteur dans $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors $X = PX'$. Si A est la matrice d'un endomorphisme u dans $\mathcal{B}$ et A' sa matrice dans $\mathcal{B}'$, alors

$$A' = P^{-1}AP.$$



Sur la figure, le vecteur $w = (3, 1)$ s'écrit $w = 2e_1' + 1e_2'$ dans la base (e_1', e_2') : ses coordonnées passent de $(3, 1)$ à $(2, 1)$, selon la formule $X = PX'$.

E

Exemple : diagonaliser pour calculer des puissances

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et la base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2)$ avec $e'_1 = (1, 1)$ et $e'_2 = (1, -1)$. On trouve $Ae'_1 = (4, 4) = 4e'_1$ et $Ae'_2 = (2, -2) = 2e'_2$. Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = D.$$

Comme $A = PDP^{-1}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$, c'est-à-dire

$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4^n + 2^n & 4^n - 2^n \\ 4^n - 2^n & 4^n + 2^n \end{pmatrix}$. Le calcul de la puissance n -ième est devenu élémentaire.

4. Rang et inversibilité

D

Rang

Le rang d'une matrice est la dimension de l'espace engendré par ses colonnes ; c'est aussi la dimension de l'espace engendré par ses lignes, et celui de toute application linéaire qu'elle représente. On a $\text{rg}(A) \leq \min(n, p)$.

P

Caractérisation de l'inversibilité

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les propositions suivantes sont équivalentes : (i) A est inversible ; (ii) $\text{rg}(A) = n$; (iii) $AX = 0$ n'a que la solution nulle ; (iv) pour tout Y , le système $AX = Y$ a une unique solution ; (v) $\det A \neq 0$. L'inverse vérifie $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

En dimension 2, une formule suffit : si $\det A = ad - bc \neq 0$, alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

E Exemple : une matrice 3×3 inversible

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Un calcul de déterminant donne $\det M = 7 \neq 0$, donc M est inversible, et en résolvant $MX = Y$ on obtient

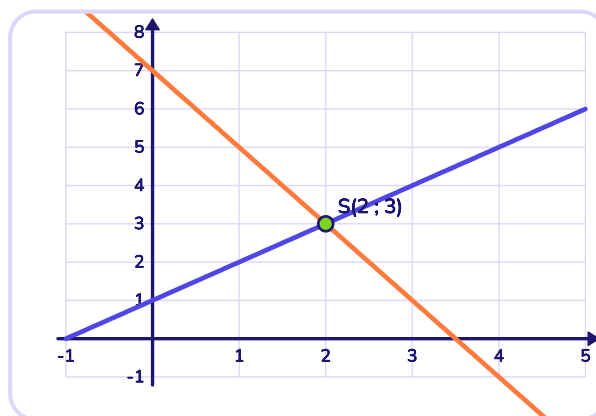
$$M^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérification sur la première ligne de M et la première colonne :

$$\frac{1}{7}(1 \times 1 + 2 \times 3 + 0 \times (-1)) = 1, \text{ ce qui est le bon coefficient de } I_3.$$

5. Systèmes linéaires et pivot de Gauss

Un système de n équations à p inconnues s'écrit $AX = B$, avec A la matrice des coefficients, X la colonne des inconnues et B le second membre. Chaque équation à deux inconnues est une droite du plan, et la solution est leur intersection.



Un système compatible a soit une unique solution (droites sécantes), soit une infinité (droites confondues), et il est incompatible si les droites sont parallèles distinctes. En dimension supérieure, la même trichotomie subsiste : **zéro, une ou une infinité de solutions**.

M**Méthode du pivot de Gauss**

1. Choisis un coefficient non nul de la première colonne (le **pivot**), échange les lignes si nécessaire.
2. Élimine l'inconnue correspondante dans les autres lignes par des opérations $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_1$.
3. Recommence sur le sous-système restant pour obtenir une forme échelonnée.
4. Résous de bas en haut ; le nombre de pivots est le rang du système, et une ligne $0 = c$ avec $c \neq 0$ signale l'incompatibilité.

E**Exemple : un système 3×3**

Résous
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x - y + z = 8 \\ x + 2y - z = -3 \end{cases}.$$

Avec $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, il vient $-3y - z = 0$ et $y - 2z = -7$.

Alors $z = -3y$, donc $y + 6y = -7$, soit $y = -1$, $z = 3$, puis $x = 4 - y - z = 2$.

La solution est $(x, y, z) = (2, -1, 3)$, et le système est de rang 3.

!**Astuce de Zyro**

Les opérations sur les lignes ne changent pas l'ensemble des solutions : sur Terre comme sur ma planète, tu peux les enchaîner sans craindre de perdre une solution.

6. Le déterminant

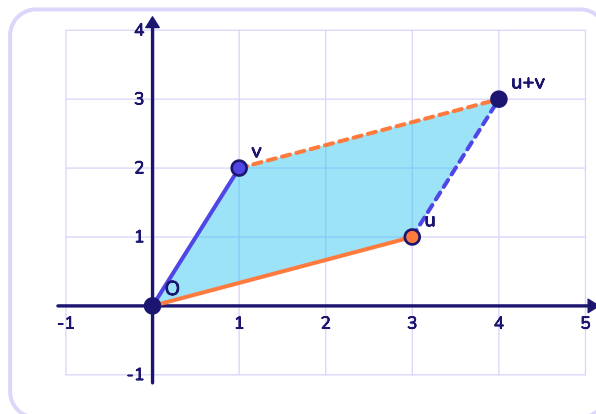
D Déterminant d'une matrice carrée

Pour $n = 2$, $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$. Pour $n \geq 2$, on le définit par récurrence en développant selon la première colonne :

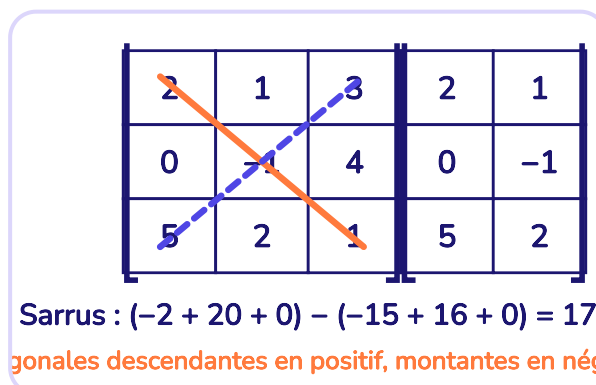
$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1},$$

où A_{i1} est la matrice obtenue en supprimant la ligne i et la colonne 1.

Géométriquement, $|\det(u, v)|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs u et v , et le signe indique l'orientation. En dimension 3, c'est un volume.



Pour $u = (3, 1)$ et $v = (1, 2)$, on lit $\det(u, v) = 3 \times 2 - 1 \times 1 = 5$, qui est bien l'aire de la zone colorée. En dimension 3, la **règle de Sarrus** donne le déterminant par six produits.



EExemple : un déterminant 3×3

Pour $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, la règle de Sarrus donne

$$\det N = (2 \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 0 \cdot 2) - (3 \cdot (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 1) = 18$$

Opération sur une matrice A de taille n **Effet sur le déterminant****échanger deux lignes (ou deux colonnes)****le déterminant change de signe****multiplier une ligne par λ** **le déterminant est multiplié par λ** **ajouter à une ligne un multiple d'une autre****le déterminant ne change pas****multiplier toute la matrice par λ** **le déterminant est multiplié par λ^n** **transposer****le déterminant ne change pas**

P**Propriétés fondamentales**

Le déterminant est **multiplicatif** : $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. On en déduit $\det(A^{-1}) = 1/\det A$ pour A inversible, et $\det(P^{-1}AP) = \det A$. Une matrice triangulaire a pour déterminant le produit de ses coefficients diagonaux. Enfin A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

A**Pas d'additivité**

En général $\det(A + B) \neq \det A + \det B$, et $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$, pas $\lambda \det A$. Pour calculer un déterminant à la main, la méthode la plus sûre est de se ramener à une matrice triangulaire par des opérations de pivot.

7. Matrices semblables et trace**D****Matrices semblables**

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP$. Autrement dit, ce sont les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes. La similitude est une relation d'équivalence.

D**Trace**

La trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

P

Propriétés de la trace

La trace est linéaire, $\text{tr}({}^tA) = \text{tr}(A)$, et surtout $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}$. Démonstration :

$$\text{tr}(AB) = \sum_i \sum_k a_{ik} b_{ki} = \sum_k \sum_i b_{ki} a_{ik} = \text{tr}(BA).$$

On en déduit que la trace est un **invariant de similitude** : $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(APP^{-1}) = \text{tr}(A)$. La trace, le déterminant et le rang d'une matrice ne dépendent donc que de l'endomorphisme, pas de la base : on parle de trace, de déterminant et de rang d'un endomorphisme.



Réciproque fausse

Deux matrices peuvent avoir même trace, même déterminant et même rang sans être semblables. En revanche, si l'un de ces invariants diffère, elles ne sont **pas** semblables : c'est la méthode standard pour le prouver.

À retenir

- Le produit AB existe si le nombre de colonnes de A est le nombre de lignes de B ; il est associatif, **non commutatif**, et ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.
- La colonne j de la matrice d'une application linéaire est l'image du j -ième vecteur de base ; composer revient à multiplier.
- Changement de base : $X = PX'$ et $A' = P^{-1}AP$.
- Pour A carrée : inversible $\iff \text{rg } A = n \iff \det A \neq 0 ; (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Le pivot de Gauss échelonne un système par des opérations sur les lignes sans changer ses solutions.
- $\det(AB) = \det A \det B$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$; un échange de lignes change le signe.
- $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$; trace, déterminant et rang sont des invariants de similitude.

Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Matrices et déterminants : exercices de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Matrices et déterminants : contrôle de maths Maths Sup

 QCM de maths

Matrices et déterminants : QCM de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Dénombrement et probabilités : exercices de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Logique et raisonnement : exercices de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Dénombrement et probabilités : contrôle de maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage