

Matrices et déterminants : exercices corrigés de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Somme et produit par un scalaire



On opère coefficient par coefficient.

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } 2B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \text{ donc } 3A - 2B = \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ 11 & -4 \end{pmatrix}.$$

2 Un produit non commutatif



$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 4 + (-1)(-2) \\ 0 + 3 \cdot 2 & 0 + 3(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & 1(-1) + 4 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 & 2(-1) + (-2) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

On constate que $AB \neq BA$: le produit matriciel n'est pas commutatif.

3 Déterminants d'ordre 2



$$5 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 14 ; (-2)(-3) - 6 \cdot 1 = 0 ; 7 \cdot 1 - (-3) \cdot 2 = 13.$$

Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul : la première et la troisième sont inversibles, la deuxième ne l'est pas.

4 Trace et transposée



$$\text{tr}(A) = 2 + 3 + 6 = 11.$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} : \text{on échange lignes et colonnes, la diagonale est inchangée, donc}$$

$$\text{tr}({}^tA) = 11.$$

5 Inverse d'une matrice 2 x 2



$$\det A = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1 \neq 0, \text{ donc } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vérification : } AA^{-1} = \begin{pmatrix} 6 - 5 & -15 + 15 \\ 2 - 2 & -5 + 6 \end{pmatrix} = I_2.$$

Pour B , $\det B = 4 - 4 = 0$: B n'est pas inversible (ses deux colonnes sont proportionnelles).

6 Vrai ou faux ?



a. Faux. Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc $(A + B)^2 = I_2$, alors que $A^2 + 2AB + B^2 = 2AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Vrai : $\sum_i \sum_k a_{ik} b_{ki} = \sum_k \sum_i b_{ki} a_{ik}$.

c. Faux. Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $AB = 0$.

d. Faux : $\det(2A) = 2^2 \det A = 4 \det A$ en dimension 2.

7 Matrice d'une application du plan dans l'espace



On calcule $f(1, 0) = (2, 1, -1)$ et $f(0, 1) = (-1, 3, 4)$: ce sont les colonnes. Donc

$$\text{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ de taille } 3 \times 2.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ -14 \end{pmatrix}, \text{ soit } f(2, -3) = (7, -7, -14).$$

8 Puissances d'une matrice triangulaire



On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: on conjecture $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Initialisation : vraie pour $n = 0$ (I_2) et $n = 1$. Hérédité : si A^n est de cette forme,

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 3 + 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi } A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 30 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9 Matrice nilpotente



$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = N^2 N = 0.$$

Comme N commute avec I_3 , $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 + N^3 = I_3$. Donc $I_3 + N$ est inversible, d'inverse $I_3 - N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10 Le prix des paniers de fruits



Soient x, y, z les prix d'une pomme, d'une poire et d'une orange. Le système est

$$\begin{cases} 2x + y + z = 12 \\ x + 2y + 3z = 23 \\ 3x + y + 2z = 19 \end{cases}$$

On échange L_1 et L_2 pour avoir un pivot égal à 1. Puis $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ donne $-3y - 5z = -34$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$ donne $-5y - 7z = -50$.

On a donc $3y + 5z = 34$ et $5y + 7z = 50$. En faisant $5 \times$ la première moins $3 \times$ la seconde, $4z = 20$, soit $z = 5$. Alors $y = (34 - 25)/3 = 3$, puis $x = 23 - 6 - 15 = 2$.

Une pomme coûte 2 €, une poire 3 € et une orange 5 €.

11 Système à une infinité de solutions



$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 : -3y + 3z = 3$, soit $z - y = 1$. $L_3 \leftarrow L_3 - L_1 : -3y + 3z = 3$, même équation : la troisième ligne est inutile. Le système est de rang 2.

On pose $x = t : z = y + 1$, et la première équation donne $t + 2y - (y + 1) = 1$, donc $y = 2 - t$ et $z = 3 - t$. Les solutions sont les triplets $(t, 2 - t, 3 - t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Avec le second membre 3, on obtient $-3y + 3z = 2$ au lieu de 3 : la ligne $0 = -1$ apparaît, le système est incompatible (aucune solution).

12 Une translation de polynômes



$T(1) = 1, T(X) = X + 1, T(X^2) = X^2 + 2X + 1$. Les colonnes sont les coordonnées de ces polynômes : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

L'application réciproque de T est $P(X) \mapsto P(X - 1)$, dont les images de la base sont $1, X - 1, X^2 - 2X + 1$: $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On vérifie par exemple que la première

ligne de M multipliée par la troisième colonne de M^{-1} donne $1 - 2 + 1 = 0$.

13 Déterminant d'ordre 3



Sarrus :

$$(1 \cdot 0 \cdot 5 + 4 \cdot 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 \cdot (-1)) - ((-2) \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 \cdot 5) = (0 + 8 + 6) - (-2 - 1 + 60) = 14 - 57 = -43.$$

Par pivot : $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ ne changent pas le déterminant et donnent

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -12 & 7 \\ 0 & -9 & 9 \end{pmatrix}, \text{ d'où } 1 \times (-12 \cdot 9 - 7 \cdot (-9)) = -108 + 63 = -45.$$

14 Déterminants et opérations



$$\det(2A) = 2^3 \det A = 32 ; \det({}^t A) = 4 ; \det(A^{-1}) = \frac{1}{4} ; \det(A^2) = 4^2 = 16 ; \\ \det(-A) = (-1)^3 \cdot 4 = -4 ; \det(A^3) = 4^3 = 64.$$

15 Calcul de rang



Pour M , la deuxième ligne vaut 2 fois la première : $L_2 - 2L_1 = 0$. Les lignes $(1, 2, 3)$ et $(1, 0, 1)$ ne sont pas proportionnelles, donc $\text{rg } M = 2$ (et $\det M = 0$).

Pour N , on remarque que $L_3 = L_1 + L_2$; L_1 et L_2 ne sont pas proportionnelles : $\text{rg } N = 2$.

16 Diagonalisation et puissances



a. $\det P = 1 - 2 = -1 \neq 0$ et $P^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b. $AP = \begin{pmatrix} 4-2 & 8-2 \\ 1+1 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, puis
 $P^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} -2+4 & -6+6 \\ 2-2 & 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$.

c. $A = PDP^{-1}$, donc

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 2 \cdot 3^n \\ 2^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^n + 2 \cdot 3^n & 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n \\ -2^n + 3^n & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 4$: $A^4 = \begin{pmatrix} 146 & -130 \\ 65 & -49 \end{pmatrix}$.

17 Les marches de l'escalier



a. Pour $n = 1$, $M = \begin{pmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{pmatrix}$. Si la formule est vraie au rang n ,

$$M^{n+1} = M^n M = \begin{pmatrix} F_{n+1} + F_n & F_{n+1} \\ F_n + F_{n-1} & F_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}.$$

b. $\det M = -1$, donc $\det(M^n) = (-1)^n$; or $\det(M^n) = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$.

c. $M^5 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $M^{10} = (M^5)^2 = \begin{pmatrix} 89 & 55 \\ 55 & 34 \end{pmatrix}$. Ainsi $F_{11} = 89$: il y a 89 façons de gravir 10 marches. Contrôle : $89 \times 34 - 55^2 = 3026 - 3025 = 1 = (-1)^{10}$.

18 Matrice à paramètre



a. En développant selon la première colonne,

$$\det M(m) = 1 \cdot (1 - m^2) - m(m \cdot 1 - 0) + 0 = 1 - 2m^2.$$

b. $M(m)$ n'est pas inversible si et seulement si $1 - 2m^2 = 0$, soit $m = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ (c'est-à-dire $m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$).

c. Pour ces valeurs, $m \neq 0$: les lignes $(1, m, 0)$ et $(0, m, 1)$ ne sont pas proportionnelles, donc le rang est au moins 2 ; comme $\det = 0$, il est exactement 2.

19 Matrices semblables ou non



a. $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $AP = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, puis $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$: A et D sont semblables.

b. $\text{tr } A = 4 = \text{tr } C$, mais $\det A = 3$ alors que $\det C = 4$. Le déterminant est un invariant de similitude : A et C ne sont pas semblables. (D'ailleurs $P^{-1}(2I_2)P = 2I_2$: la seule matrice semblable à $2I_2$ est elle-même.)

20 Une prévision météo



a. $T^2 = \begin{pmatrix} 0,64 + 0,08 & 0,32 + 0,24 \\ 0,16 + 0,12 & 0,08 + 0,36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,56 \\ 0,28 & 0,44 \end{pmatrix}$. Alors

$X_2 = T^2 X_0 = \begin{pmatrix} 0,72 \\ 0,28 \end{pmatrix}$: la probabilité d'avoir du soleil après-demain est 0,72.

b. $TX = X$ donne $0,8s + 0,4p = s$, soit $0,2s = 0,4p$, donc $s = 2p$. Avec $s + p = 1$, $p = \frac{1}{3}$ et $s = \frac{2}{3}$. À long terme, deux jours sur trois sont ensoleillés.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Matrices et déterminants : exercices de maths Maths Sup

QCM de maths

Matrices et déterminants : QCM de maths Maths Sup

Contrôles de maths

Matrices et déterminants : contrôle de maths Maths Sup

Exercices de maths

Dénombrement et probabilités : exercices de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Logique et raisonnement : exercices de maths Maths Sup

 QCM de maths

Dénombrement et probabilités : QCM de maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage