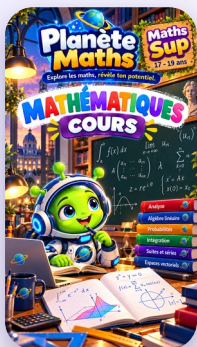


Logique et raisonnement : cours de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

En classe préparatoire, on ne se contente plus de calculer : on démontre. Pour écrire une preuve correcte, il faut maîtriser le langage des assertions, savoir nier une phrase mathématique sans se tromper et connaître quelques grands schémas de raisonnement (récurrence, absurde, contraposée, analyse-synthèse). Ce chapitre pose les bases dont tu te serviras dans tous les chapitres de l'année.

1. Propositions et connecteurs

Une **proposition** (ou assertion) est un énoncé mathématique qui est soit vrai, soit faux, jamais les deux. Par exemple « **17** est un nombre premier » est vraie et « **$2^{10} = 1000$** » est fausse. À partir de deux propositions **P** et **Q** , on en fabrique d'autres avec des **connecteurs** : la négation « non **P** », la conjonction « **P** et **Q** », la disjonction « **P** ou **Q** », l'implication **$P \Rightarrow Q$** et l'équivalence **$P \Leftrightarrow Q$** .

D

Table de vérité

La valeur de vérité d'une proposition composée ne dépend que de celles de ses composantes. Voici les cinq connecteurs usuels (V pour vrai, F pour faux).

P	Q	$\text{non } P$	$P \text{ et } Q$	$P \text{ ou } Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Le « ou » mathématique est *inclusif* : P ou Q est vraie dès que l'une au moins des deux est vraie, y compris les deux à la fois.



Implication et mot « si »

$P \Rightarrow Q$ n'est fausse que dans un seul cas : P vraie et Q fausse. Quand P est fausse, l'implication est vraie quel que soit Q . Ainsi « si $1 = 2$ alors $5 = 7$ » est une proposition vraie. De plus, $P \Rightarrow Q$ a même table que « (non P) ou Q » : c'est la clé de nombreuses démonstrations.

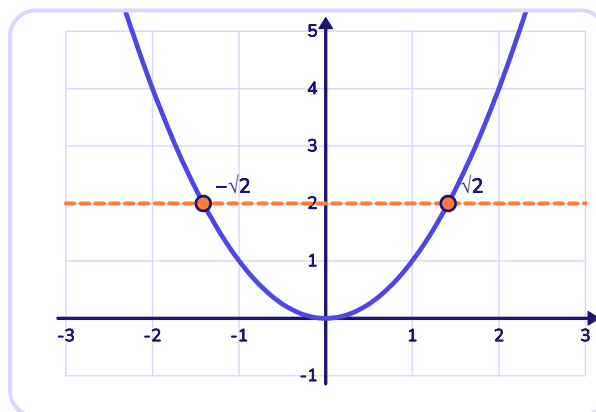
Deux propositions qui ont la même table de vérité sont dites **logiquement équivalentes**. On verra plus bas, par exemple, que $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa contraposée.

2. Quantificateurs

D Quantificateurs

Soit E un ensemble et $P(x)$ une assertion qui dépend de $x \in E$. La proposition « $\forall x \in E, P(x)$ » signifie que $P(x)$ est vraie pour **tous** les éléments de E . La proposition « $\exists x \in E, P(x)$ » signifie qu'il existe **au moins un** élément de E pour lequel $P(x)$ est vraie. Enfin « $\exists! x \in E, P(x)$ » signifie qu'il en existe **exactement un**.

Pour montrer une assertion universelle, on prend un élément quelconque de E et on prouve la propriété pour lui. Pour la réfuter, un seul **contre-exemple** suffit. À l'inverse, pour prouver une assertion existentielle, il suffit d'exhiber un élément (un « témoin »).



La figure illustre « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$ » : la droite d'équation $y = 2$ coupe la parabole en deux points, d'abscisses $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. En revanche, « $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$ » est fausse, car la droite $y = -1$ ne rencontre jamais la parabole.

⚠ L'ordre des quantificateurs compte

« $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y > x$ » est vraie : pour chaque x on prend $y = x + 1$. Mais « $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y > x$ » est fausse : aucun réel n'est plus grand que tous les réels, en particulier pas plus grand que lui-même. Dans la première, y peut dépendre de x ; dans la seconde, non.

3. Négation d'une assertion

Savoir nier une phrase est indispensable pour réfuter, pour raisonner par l'absurde ou par contraposée. Les règles suivantes se démontrent avec les tables de vérité.

P

Règles de négation

- $\text{non}(\text{non } P)$ équivaut à P .
- $\text{non}(P \text{ et } Q)$ équivaut à $(\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$; $\text{non}(P \text{ ou } Q)$ équivaut à $(\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$.
- $\text{non}(P \Rightarrow Q)$ équivaut à $P \text{ et } (\text{non } Q)$.
- $\text{non}(\forall x \in E, P(x))$ équivaut à $\exists x \in E, \text{non } P(x)$.
- $\text{non}(\exists x \in E, P(x))$ équivaut à $\forall x \in E, \text{non } P(x)$.

M

Nier une phrase à plusieurs quantificateurs

1. Lis la phrase de gauche à droite.
2. Remplace chaque $\forall$ par $\exists$ et chaque $\exists$ par $\forall$, sans changer l'ordre ni les ensembles.
3. Nie la propriété finale (par exemple $>$ devient $\leq$).

E

Exemple : suite non bornée

Une suite réelle (u_n) est bornée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$. Sa négation, « la suite n'est pas bornée », s'écrit $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, |u_n| > M$. Pour $u_n = n^2 - 10n$, on prend $n = |M| + 20$, ce qui donne $u_n = n(n - 10) \geq n \geq 20 + |M|$ donc $u_n > M$: la suite n'est pas bornée.



Conditions sur la variable

La négation de « $\forall x > 0, P(x)$ » est « $\exists x > 0, \text{non } P(x)$ » : la condition $x > 0$ reste en place, seule la propriété est niée. De même pour une implication : $\text{non}(P \Rightarrow Q)$ n'est pas « $P \Rightarrow \text{non } Q$ ».

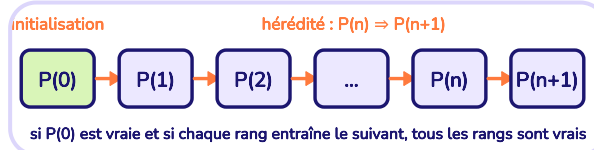
4. Raisonnement par récurrence



Principe de récurrence

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une assertion définie pour $n \geq n_0$. Si $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**) et si, pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (**hérédité**), alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Variante **forte** : si $P(n_0)$ est vraie et si, pour tout $n \geq n_0$, « $P(n_0), \dots, P(n)$ toutes vraies » entraîne $P(n+1)$, alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$. Quand une suite est définie à l'aide de deux termes précédents, on initialise sur deux rangs.



L'image de Zyro

« Sur ma planète, on aligne des cristaux : si le premier tombe et si chaque cristal fait tomber le suivant, alors toute la rangée tombe. Il faut les deux conditions ! »

E**Exemple : une suite définie par récurrence**

Soit (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Montrons que $u_n = 2^{n+2} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation. $2^{0+2} - 1 = 3 = u_0$.

Hérédité. Supposons $u_n = 2^{n+2} - 1$ pour un entier n fixé. Alors
 $u_{n+1} = 2(2^{n+2} - 1) + 1 = 2^{n+3} - 1$, c'est la formule au rang $n + 1$.

Conclusion. La formule est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par exemple $u_3 = 2^5 - 1 = 31$.

**Deux erreurs fréquentes**

Oublier l'initialisation (une hérédité seule ne prouve rien : $P(n)$: « $n = n + 1$ » est héréditaire mais fausse) ; ou écrire « supposons $P(n)$ pour tout n », ce qui revient à supposer ce qu'on veut démontrer. L'hypothèse porte sur *un* entier n fixé.

5. Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer une proposition P , on peut supposer que non P est vraie et en déduire une contradiction (une proposition à la fois vraie et fausse, ou un résultat manifestement faux). Comme les mathématiques ne tolèrent pas de contradiction, c'est que non P est fausse, donc P est vraie.

M**Rédiger une preuve par l'absurde**

1. Écris « Raisonnons par l'absurde et supposons que ... » en niant correctement la conclusion.
2. Déduis-en des conséquences jusqu'à obtenir une contradiction explicite.
3. Conclue que l'hypothèse est impossible, donc que la proposition initiale est vraie.

E**Exemple : $\log_{10}(2)$ est irrationnel**

Supposons par l'absurde que $\log_{10}(2) = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers strictement positifs (le nombre est strictement positif). Alors $10^{p/q} = 2$, donc $10^p = 2^q$. Or $10^p = 2^p \times 5^p$ est divisible par 5, alors que 2^q n'a que le facteur premier 2 : contradiction. Donc $\log_{10}(2)$ n'est pas rationnel.

6. Contraposée et analyse-synthèse**P****Contraposée**

L'implication $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa **contraposée** $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$. En revanche, la **réciproque** $Q \Rightarrow P$ n'est pas équivalente à $P \Rightarrow Q$.

On passe à la contraposée quand la conclusion est plus facile à manipuler négativement que l'hypothèse, typiquement pour des énoncés du type « si ... n'est pas ..., alors ... ».

E Exemple : x réel avec $|x| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$

Montrons que si $\forall \varepsilon > 0, |x| \leq \varepsilon$, alors $x = 0$. Contraposée : si $x \neq 0$, alors $\exists \varepsilon > 0, |x| > \varepsilon$. C'est vrai : on prend $\varepsilon = \frac{|x|}{2} > 0$ et on a bien $|x| > \frac{|x|}{2}$.

M Analyse-synthèse

Pour trouver tous les objets qui vérifient une condition : (1) *analyse* : on suppose qu'un objet convient et on en déduit des conditions nécessaires qui le déterminent (en général, une liste de candidats) ; (2) *synthèse* : on vérifie que chaque candidat convient réellement. Les deux étapes sont indispensables, car l'analyse n'établit que des implications.

E Exemple : résoudre $\sqrt{x+6} = x$ dans $\mathbb{R}$

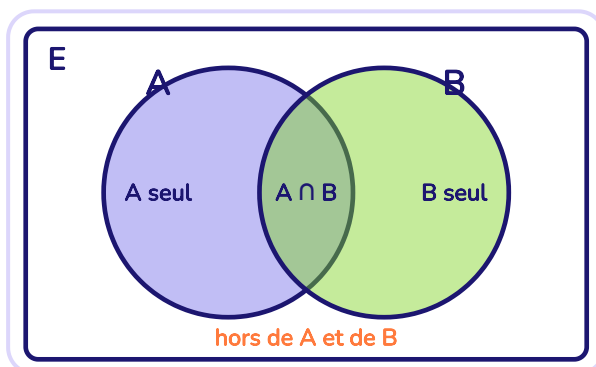
Analyse. Si x est solution, alors $x \geq 0$ et, en élevant au carré, $x+6 = x^2$, soit $x^2 - x - 6 = 0$, d'où $(x-3)(x+2) = 0$ et $x = 3$ ou $x = -2$. Comme $x \geq 0$, il ne reste que $x = 3$.

Synthèse. $\sqrt{3+6} = \sqrt{9} = 3$: la valeur 3 convient. L'ensemble des solutions est $\{3\}$.

7. Ensembles et parties

D Ensembles

On dit que A est **inclus** dans E , et on note $A \subset E$, si tout élément de A est dans E : $\forall x, x \in A \Rightarrow x \in E$. Pour deux parties A et B de E : $A \cap B$ est l'ensemble des éléments communs, $A \cup B$ celui des éléments de l'un au moins, $A \setminus B$ celui des éléments de A qui ne sont pas dans B , et $\bar{A} = E \setminus A$ est le **complémentaire** de A dans E . L'ensemble de toutes les parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$, et le **produit cartésien** $A \times B$ est l'ensemble des couples (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$.



Pour montrer que deux ensembles sont égaux, on procède par **double inclusion** : $A = B$ équivaut à $A \subset B$ et $B \subset A$. Pour $A \subset B$, on prend $x \in A$ quelconque et on prouve $x \in B$.

P Lois de De Morgan et cardinal

Pour $A, B \subset E$: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$. Si les ensembles sont finis, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$ et $\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{Card } E}$.

E**Exemple : les parties d'un ensemble à deux éléments**

Pour $E = \{a, b\}$, on a $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, soit $4 = 2^2$ parties. Attention : $a \in E$ mais $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$ et $\{a\} \subset E$; ne confonds pas appartenance et inclusion.

À retenir

- $P \Rightarrow Q$ est fausse seulement si P est vraie et Q fausse ; elle équivaut à $(\text{non } P) \text{ ou } Q$ et à sa contraposée.
- Pour nier : $\forall$ et $\exists$ s'échangent, l'ordre est conservé, la propriété finale est niée.
- Un contre-exemple suffit à réfuter un $\forall$; un témoin suffit à prouver un $\exists$.
- Récurrence : initialisation, hérédité sur un n fixé, conclusion. Récurrence forte ou double si la relation fait intervenir plusieurs termes.
- Absurde : on nie la conclusion et on cherche une contradiction. Analyse-synthèse : conditions nécessaires, puis vérification.
- Égalité d'ensembles : double inclusion. $\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{Card } E}$.

Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

  **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Logique et raisonnement : exercices de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Logique et raisonnement : contrôle de maths Maths Sup

 QCM de maths

Logique et raisonnement : QCM de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Nombres complexes et trigonométrie : exercices de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Applications et relations : exercices de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Nombres complexes et trigonométrie : contrôle de maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage