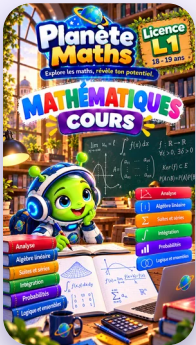


Logique et ensembles : cours de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Avant de démontrer quoi que ce soit en analyse, en algèbre ou en probabilités, il faut s'accorder sur un langage : savoir écrire une phrase mathématique sans ambiguïté, la nier correctement, choisir la bonne forme de raisonnement et manipuler des collections d'objets appelées ensembles. Ce chapitre installe ces outils, que vous réutiliserez dans toute la licence : **connecteurs et quantificateurs**, **contraposée, absurde et récurrence**, puis **ensembles, produits, relations d'équivalence et relations d'ordre**.

1. Propositions et connecteurs

D Proposition

Une proposition est un énoncé mathématique qui est soit **vrai** (V), soit **faux** (F), jamais les deux. Ainsi « **17** est un nombre premier » est une proposition vraie, « **$2^{10} = 1000$** » une proposition fausse, alors que « **$x + 1 = 5$** » n'est pas une proposition tant que **x** n'est pas précisé.

À partir de propositions **P** et **Q** , on en fabrique d'autres grâce aux **connecteurs** : la négation **$\neg P$** (« non **P** »), la conjonction **$P \wedge Q$** (« **P** et **Q** »), la disjonction **$P \vee Q$** (« **P** ou **Q** »), l'implication **$P \Rightarrow Q$** et l'équivalence **$P \Leftrightarrow Q$** . Leur sens est entièrement décrit par une **table de vérité**.

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

⚠ Deux pièges du langage courant

Le « ou » mathématique est **inclusif** : **$P \vee Q$** est vraie si l'une des deux, ou les deux, sont vraies. Et l'implication **$P \Rightarrow Q$** n'est fausse que dans un seul cas : **P** vraie et **Q** fausse. Une hypothèse fausse ne contredit donc jamais une implication : « si **$1 = 2$** alors la Lune est en fromage » est une implication vraie.

E**Exemple : nier une implication**

Montrons que $\neg(P \Rightarrow Q)$ équivaut à $P \wedge \neg Q$. On compare les deux colonnes ligne par ligne : pour $(P, Q) = (V, V)$, l'implication est vraie donc sa négation est fausse, et $P \wedge \neg Q$ est fausse ; pour (V, F) , l'implication est fausse donc sa négation est vraie, et $P \wedge \neg Q$ est vraie ; pour (F, V) et (F, F) , l'implication est vraie, sa négation fausse, et $P \wedge \neg Q$ est fausse car P l'est. Les deux propositions ont la même table de vérité : elles sont équivalentes.

2. Quantificateurs**D****Quantificateurs**

Le quantificateur universel $\forall$ (« pour tout ») et le quantificateur existentiel $\exists$ (« il existe ») permettent de parler d'une propriété $P(x)$ qui dépend d'un élément x d'un ensemble E . On écrit $\forall x \in E, P(x)$ et $\exists x \in E, P(x)$. La notation $\exists!$ signifie « il existe un unique ».

P**Négation des quantificateurs**

$$\neg(\forall x \in E, P(x)) \iff \exists x \in E, \neg P(x) \quad \text{et} \quad \neg(\exists x \in E, P(x)) \iff \forall x$$

Pour nier une phrase quantifiée, on échange donc chaque $\forall$ avec $\exists$ et on nie la propriété finale.

L'ordre des quantificateurs compte. Dans $\mathbb{N}$, la phrase $\forall n, \exists m, m > n$ est vraie (prendre $m = n + 1$), tandis que $\exists m, \forall n, m > n$ est fausse : elle affirmerait qu'un entier est strictement plus grand que tous les entiers, lui-même compris.

E**Exemple : nier une phrase quantifiée**

Soit P : « $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \geq 2n$ ». Sa négation est « $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 < 2n$ ». Pour $n = 1$ on a $1 < 2$: la négation est vraie, donc P est fausse. Un seul exemple suffit à réfuter un $\forall$: on parle de **contre-exemple**. En revanche, des centaines de vérifications ne démontrent jamais un $\forall$.

3. Contraposée et raisonnement par l'absurde**P****Contraposée**

L'implication $P \Rightarrow Q$ est équivalente à sa **contraposée** $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Elle n'est pas équivalente à sa **réciproque** $Q \Rightarrow P$.

E**Exemple : démonstration par contraposée**

Montrons que, pour $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est impair alors n est impair. La contraposée est : si n est pair, alors n^2 est pair. Or si $n = 2k$, alors $n^2 = 4k^2 = 2 \times 2k^2$ est bien pair. La contraposée est démontrée, donc l'implication initiale aussi.

M**Raisonnement par l'absurde**

1. On suppose que la proposition à démontrer est **fausse**, c'est-à-dire que sa négation est vraie.
2. On déroule des déductions correctes à partir de cette hypothèse.
3. On aboutit à une contradiction (un résultat faux ou en conflit avec une hypothèse).
4. On conclut que l'hypothèse de départ était impossible : la proposition est vraie.

E**Exemple : démonstration par l'absurde**

Montrons que la somme d'un rationnel r et d'un irrationnel x est irrationnelle. Supposons $r + x = s$ rationnel. Alors $x = s - r$ serait une différence de deux rationnels, donc un rationnel : contradiction avec l'irrationalité de x . Ainsi $r + x$ est irrationnel.

4. Raisonnement par récurrence**P****Principe de récurrence**

Soit $P(n)$ une propriété portant sur l'entier $n \geq n_0$. Si $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**) et si, pour tout $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (**hérédité**), alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

L'image est celle d'une file de dominos : le premier tombe, et chaque domino qui tombe fait tomber le suivant. Pour la **récurrence forte**, l'hérédité suppose $P(k)$ vraie pour *tous* les k compris entre n_0 et n ; c'est indispensable pour les suites définies par une relation à deux pas.

E**Exemple : une somme classique**

Montrons que, pour tout $n \geq 1$, $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation. Pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 1 et celui de droite $\frac{1 \times 2}{2} = 1$.

Hérédité. Supposons la formule vraie au rang n . Alors

$1 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, c'est la formule au rang $n+1$.

Conclusion. La formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

**Oublier l'initialisation**

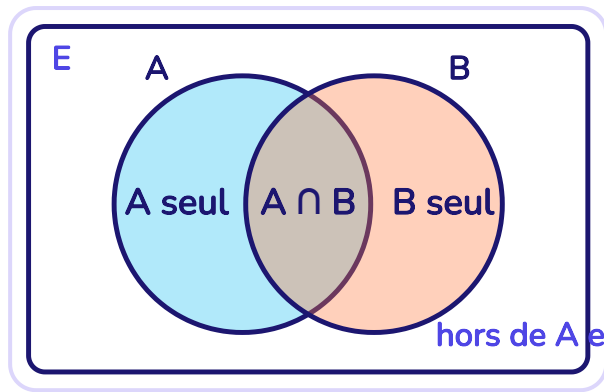
Sans initialisation, l'hérédité ne prouve rien : la propriété « $n = n+1$ » est héréditaire (si $n = n+1$, alors $n+1 = n+2$) mais elle est fausse pour tout n .

5. Ensembles et parties

Un **ensemble** est une collection d'objets appelés **éléments**. On écrit $x \in E$ si x appartient à E . L'ensemble A est **inclus** dans E , noté $A \subset E$, si tout élément de A est dans E : on dit que A est une **partie** de E . L'ensemble de toutes les parties de E se note $\mathcal{P}(E)$; il contient toujours $\emptyset$ et E .

D**Opérations**

Pour $A, B \subset E$: l'intersection $A \cap B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \in B\}$, la réunion $A \cup B = \{x \in E : x \in A \text{ ou } x \in B\}$, la différence $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ et le complémentaire $\bar{A} = E \setminus A$.



P Lois de De Morgan et dénombrement

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Si A et B sont finis : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. Si E a n éléments, $\mathcal{P}(E)$ en a 2^n .

M Démontrer une égalité d'ensembles

1. Prendre un élément quelconque x du premier ensemble et montrer qu'il est dans le second : première inclusion.
2. Faire l'inverse : seconde inclusion.
3. Conclure à l'égalité, c'est la **double inclusion**.

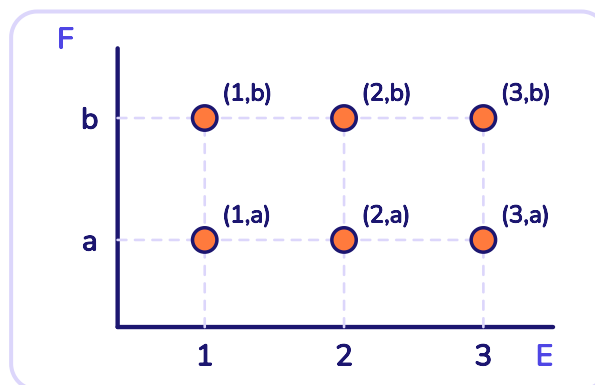
E**Exemple : compter avec l'intersection**

Dans $E = \{1, 2, \dots, 20\}$, soit A l'ensemble des multiples de **3** et B celui des multiples de **4**. On a $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, soit **6** éléments, et $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, soit **5** éléments. Leur intersection est $\{12\}$ (multiples de **12**). Donc $|A \cup B| = 6 + 5 - 1 = 10$, et $|\overline{A \cup B}| = 20 - 10 = 10$ entiers ne sont multiples ni de **3** ni de **4**.

6. Produit cartésien**D****Produit cartésien**

Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble des **couples** $E \times F = \{(x, y) : x \in E, y \in F\}$. Deux couples sont égaux si et seulement si leurs deux composantes sont égales, dans l'ordre :

$$(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ et } y = y'.$$



Pour $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{a, b\}$, le produit $E \times F$ comporte $3 \times 2 = 6$ couples, visibles sur la grille ci-dessus. En général, $|E \times F| = |E| \times |F|$. L'ordre compte : $(1, a) \in E \times F$ mais $(1, a) \notin F \times E$, donc $E \times F \neq F \times E$ dès que les deux ensembles sont non vides et distincts. On note $E^2 = E \times E$; le plan muni d'un repère est $\mathbb{R}^2$.

7. Relations d'équivalence

D Relation d'équivalence

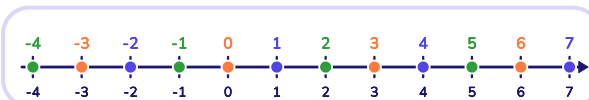
Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation d'équivalence si elle est : **réflexive** ($x \mathcal{R} x$), **symétrique** ($x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$) et **transitive** ($x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$). La classe de x est $\bar{x} = \{y \in E : y \mathcal{R} x\}$.

P Partition en classes

Les classes d'équivalence sont non vides et deux classes sont soit **égales**, soit **disjointes** ; leur réunion est E . Elles forment une **partition** de E , et $x \mathcal{R} y \iff \bar{x} = \bar{y}$.

E Exemple : la congruence modulo 3

Sur $\mathbb{Z}$, posons $x \equiv y$ si 3 divise $x - y$. Réflexivité : $x - x = 0$ est divisible par 3. Symétrie : si $3 \mid x - y$ alors $3 \mid y - x$. Transitivité : si $x - y = 3a$ et $y - z = 3b$, alors $x - z = 3(a + b)$. C'est une relation d'équivalence, qui possède exactement trois classes : $\bar{0} = \{\dots, -3, 0, 3, 6, \dots\}$, $\bar{1} = \{\dots, -2, 1, 4, 7, \dots\}$ et $\bar{2} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, \dots\}$, selon le reste dans la division par 3.



8. Relations d'ordre

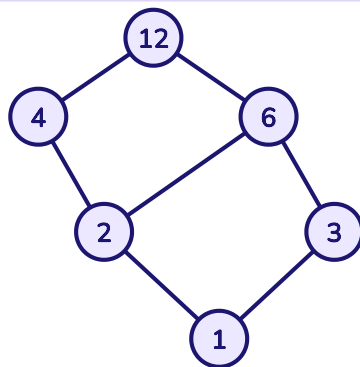
D Relation d'ordre

Une relation $\preceq$ sur E est une relation d'ordre si elle est **réflexive**, **antisymétrique** ($x \preceq y$ et $y \preceq x \Rightarrow x = y$) et **transitive**. Elle est **totale** si deux éléments quelconques sont toujours comparables, sinon l'ordre est **partiel**.

Dans E muni de $\preceq$, un élément m est un **plus petit élément** s'il est inférieur à tous les autres, et un élément **maximal** si aucun élément distinct n'est au-dessus de lui. Un plus grand élément, s'il existe, est unique ; un élément maximal n'est pas forcément le plus grand.

E Exemple : l'ordre de divisibilité

Sur $\mathbb{N}^*$, la relation $a \mid b$ (« a divise b ») est réflexive ($a \mid a$), antisymétrique (si $a \mid b$ et $b \mid a$ alors $a \leq b$ et $b \leq a$, donc $a = b$) et transitive. C'est un ordre **partiel** : 4 et 6 ne sont pas comparables car $4 \nmid 6$ et $6 \nmid 4$. Sur $D = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, le plus petit élément est 1, le plus grand est 12.





Astuce de Zyro

Pour lire un diagramme de Hasse, montez de bas en haut : $a \preceq b$ si l'on peut aller de a à b en suivant des segments qui montent. Deux éléments qu'aucun chemin montant ne relie sont incomparables !

À retenir

- Une implication $P \Rightarrow Q$ n'est fausse que si P est vraie et Q fausse ; elle équivaut à sa contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$, pas à sa réciproque.
- Pour nier une phrase quantifiée, on échange $\forall$ et $\exists$ puis on nie la conclusion ; l'ordre des quantificateurs change le sens.
- Un contre-exemple réfute un « pour tout » ; l'absurde suppose la négation et cherche une contradiction.
- Une récurrence exige l'initialisation *et* l'hérédité.
- Égalité d'ensembles : double inclusion. De Morgan : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$, $|E \times F| = |E||F|$.
- Équivalence = réflexive, symétrique, transitive : ses classes partitionnent E . Ordre = réflexive, antisymétrique, transitive ; total si tout couple est comparable.

Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Logique et ensembles : exercices de maths Licence L1

 Contrôles de maths

Logique et ensembles : contrôle de maths Licence L1

 QCM de maths

Logique et ensembles : QCM de maths Licence L1

 Exercices de maths

Applications et dénombrement : exercices de maths Licence L1

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Nombres réels et suites : exercices de maths Licence L1

Applications et dénombrement : contrôle de maths Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage