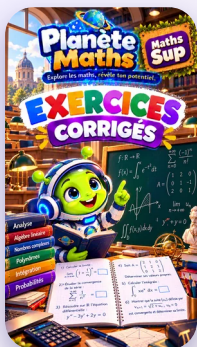


Logique et raisonnement : exercices corrigés de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Valeurs de vérité



7 n'est divisible que par 1 et 7 : P est vraie. $12 = 5 \times 2 + 2$: Q est fausse.

- P et Q : fausse (il faut les deux vraies).
- P ou Q : vraie (P l'est).
- $P \Rightarrow Q$: fausse, car P est vraie et Q fausse.
- $Q \Rightarrow P$: vraie, car Q est fausse.
- $P \Leftrightarrow Q$: fausse, car P et Q n'ont pas la même valeur.

2 Implication et « non ou »



On calcule ligne par ligne :

P	Q	$\text{non } P$	$(\text{non } P) \text{ ou } Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Les deux dernières colonnes sont identiques : « $(\text{non } P) \text{ ou } Q$ » et $P \Rightarrow Q$ sont logiquement équivalentes.

3 Vrai ou faux avec quantificateurs



- Vraie** : un carré réel est toujours positif ou nul.
- Fausse** : $x^2 \geq 0 > -4$ pour tout réel x .
- Vraie** : si $n = 0$, $0 \geq 0$; si $n \geq 1$, $n^2 = n \times n \geq n \times 1 = n$.
- Fausse** : $2n + 1$ est impair, jamais égal à 10.
- Fausse** : contre-exemple $x = 0$, car $0 > 0$ est faux (de même pour $x = 1$).

4 Nier des assertions simples



- a. Négation : $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \neq 50$. Comme $7^2 = 49$ et $8^2 = 64$, aucun carré ne vaut 50 : la **négation** est vraie.
- b. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 4x + 5 \leq 0$. Or $x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1 \geq 1 > 0$: l'**assertion** est vraie.
- c. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x > 2$ et $x^2 \leq 4$. Si $x > 2$, alors $x^2 > 4$ (fonction carré croissante sur $\mathbb{R}_+$) : l'**assertion** est vraie.

5 Intersection, réunion, différence



- $A \cap B = \{2, 4, 6\}$.
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$.
- $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$.
- $B \setminus A = \{8\}$.
- $\overline{A} = \{7, 8\}$.

Cardinaux : $\text{Card}(A) = 6$, $\text{Card}(B) = 4$, $\text{Card}(A \cap B) = 3$, donc $6 + 4 - 3 = 7 = \text{Card}(A \cup B)$. La formule est vérifiée.

6 Les parties d'un ensemble à trois éléments



Par taille : $\emptyset ; \{a\}, \{b\}, \{c\} ; \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} ; \{a, b, c\}$.

Au total $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ parties, et $2^3 = 8$: la formule $\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{Card } E}$ est vérifiée.

7 Somme des premiers nombres impairs



Initialisation ($n = 1$). Le membre de gauche vaut **1** et $1^2 = 1$.

Hérédité. Supposons $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ pour un $n \geq 1$ fixé. Alors

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2.$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. Elle est vraie pour tout $n \geq 1$. Par exemple, la somme des **10** premiers impairs vaut **100**.

8 Une somme avec des factorielles



Initialisation. Pour $n = 1$: $1 \times 1! = 1$ et $2! - 1 = 1$.

Hérédité. Supposons la formule vraie au rang n . Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k! = (n + 1)! - 1 + (n + 1)(n + 1)! = (n + 1)!(1 + n + 1) - 1 = (n + 2)! - 1.$$

C'est la formule au rang $n + 1$.

Conclusion. La formule est vraie pour tout $n \geq 1$. Contrôle : pour $n = 3$,
 $1 + 4 + 18 = 23 = 4! - 1$.

9 Divisibilité par 6



Initialisation. $7^0 - 1 = 0 = 6 \times 0$.

Hérédité. Supposons $7^n - 1 = 6k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^n - 1 = 7(7^n - 1) + 6 = 42k + 6 = 6(7k + 1), \text{ multiple de } 6.$$

Conclusion. Pour tout n , **6** divise $7^n - 1$. Par exemple $7^2 - 1 = 48 = 6 \times 8$.

10 Une inégalité à partir d'un certain rang



Contre-exemple. $2^3 = 8 < 9 = 3^2$: l'inégalité est fausse pour $n = 3$, d'où le rang initial 4.

Initialisation ($n = 4$). $2^4 = 16 = 4^2$, donc $16 \geq 16$.

Hérédité. Supposons $2^n \geq n^2$ avec $n \geq 4$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2$. Or $2n^2 - (n+1)^2 = n^2 - 2n - 1 = (n-1)^2 - 2 \geq 9 - 2 > 0$ car $n \geq 4$. Donc $2^{n+1} \geq (n+1)^2$.

Conclusion. $2^n \geq n^2$ pour tout $n \geq 4$.

11 Raisonner par contraposée



Contraposée. « Si n n'est pas divisible par 3, alors $n^2 - 1$ est divisible par 3. »

Si 3 ne divise pas n , alors $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2 = 3(k+1) - 1$. On peut donc écrire $n = 3m \pm 1$ avec $m \in \mathbb{N}$. Alors $n^2 - 1 = 9m^2 \pm 6m = 3(3m^2 \pm 2m)$, divisible par 3.

La contraposée est vraie, donc l'implication de départ aussi. Contrôle : $n = 5$ donne $24 = 3 \times 8$; $n = 6$ donne 35, non divisible par 3, et $3 \nmid 6$.

12 Absurde : une équation sans solution entière



Raisonnons par l'absurde : supposons $x^2 - y^2 = 2$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$. Alors

$$(x - y)(x + y) = 2.$$

Les entiers $x - y$ et $x + y$ ont la même parité, car leur différence $2y$ est paire. Leur produit valant 2, qui est pair, l'un d'eux est pair, donc les deux le sont. Le produit est alors divisible par 4, or 2 ne l'est pas : contradiction.

Il n'existe donc aucun couple solution.

13 Permuter les quantificateurs



- a. La première est **vraie** : pour x donné, $y = x + 1$ convient. La seconde est **fausse** : si un tel y existait, on aurait $y > y$ en prenant $x = y$.
- b. La première est **vraie** : pour x donné, $y = -x$ convient. La seconde est **fausse** : un seul y devrait vérifier $x + y = 0$ pour tous les x ; mais $x = 0$ impose $y = 0$ et $x = 1$ impose $y = -1$.

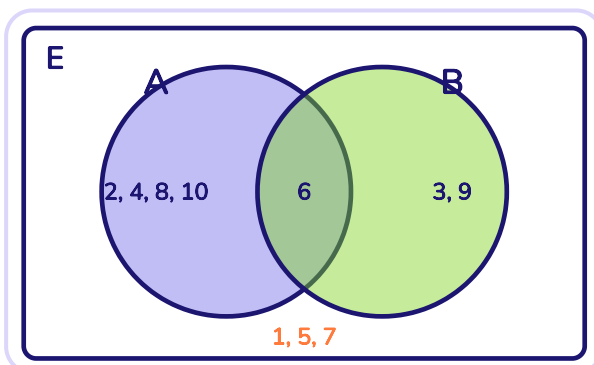
Moralité : dans « $\forall x, \exists y$ », y peut dépendre de x , pas dans « $\exists y, \forall x$ ».

14 Lois de De Morgan



Preuve. Soit $x \in \overline{A \cup B}$: alors $x \in E$ et $x \notin A \cup B$, donc $x \notin A$ et $x \notin B$, c'est-à-dire $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Réciproquement, si $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, alors $x \notin A$ et $x \notin B$, donc $x \notin A \cup B$ et $x \in \overline{A \cup B}$. Les deux ensembles sont égaux.

Exemple. $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{3, 6, 9\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$, donc $\overline{A \cup B} = \{1, 5, 7\}$. D'autre part $\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ et $\overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$, d'où $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 5, 7\}$: même résultat.



15 Résoudre par analyse-synthèse

★★★

Analyse. Si x est solution, alors $x = \sqrt{x+12} \geq 0$ et $x^2 = x + 12$, soit $x^2 - x - 12 = 0$, c'est-à-dire $(x-4)(x+3) = 0$. Donc $x = 4$ ou $x = -3$.

Synthèse. Pour $x = 4$: $\sqrt{16} = 4$, valable. Pour $x = -3$: $\sqrt{9} = 3 \neq -3$, à rejeter.

Solution : $\{4\}$. La synthèse est nécessaire car élever au carré n'est pas une équivalence : $a^2 = b^2$ n'entraîne que $a = \pm b$.

16 Décomposition paire et impaire

★★★

Analyse. Si $f = p + i$ avec p paire et i impaire, alors $f(x) = p(x) + i(x)$ et $f(-x) = p(x) - i(x)$. En additionnant et en soustrayant : $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$. Ceci prouve l'unicité : p et i sont déterminées par f .

Synthèse. Les fonctions ainsi définies sont respectivement paire et impaire (on remplace x par $-x$), et leur somme vaut f : c'est l'existence.

Application. $f(-x) = -x^3 + 2x^2 + x + 5$, donc $p(x) = 2x^2 + 5$ et $i(x) = x^3 - x$. On vérifie $p + i = f$.

17 Récurrence double

★★★

Comme la relation fait intervenir deux termes précédents, on utilise une récurrence à deux rangs : on montre $P(n)$: « $u_n = 2^{n+1} - 1$ et $u_{n+1} = 2^{n+2} - 1$ ».

Initialisation. $2^1 - 1 = 1 = u_0$ et $2^2 - 1 = 3 = u_1$.

Hérédité. Supposons $P(n)$. Alors

$u_{n+2} = 3(2^{n+2} - 1) - 2(2^{n+1} - 1) = 3 \times 2^{n+2} - 2^{n+2} - 1 = 2 \times 2^{n+2} - 1 = 2^{n+3} - 1$.
Donc $u_{n+1} = 2^{n+2} - 1$ et $u_{n+2} = 2^{n+3} - 1$: $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. $u_n = 2^{n+1} - 1$ pour tout n . Par exemple $u_4 = 31$.

18 Irrationalité par l'absurde

★★★

1. Supposons $\sqrt{6} = \frac{a}{b}$ avec a, b entiers strictement positifs premiers entre eux. Alors $a^2 = 6b^2$, donc a^2 est pair, donc a est pair : $a = 2c$. Il vient $4c^2 = 6b^2$, soit $2c^2 = 3b^2$, donc b^2 est pair et b est pair. Ainsi a et b sont tous deux pairs, ce qui contredit « premiers entre eux ». Donc $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

2. Supposons $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ rationnel. Alors $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, donc $\sqrt{6} = \frac{x^2 - 5}{2}$ serait rationnel (opérations sur les rationnels) : contradiction avec 1. Donc $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

19 Nombre de parties d'un ensemble fini

★★★

Initialisation ($n = 0$). L'ensemble vide n'a qu'une partie, lui-même : $1 = 2^0$.

Hérédité. Soit F un ensemble à $n + 1$ éléments ; on fixe $x \in F$ et on pose $E = F \setminus \{x\}$, qui a n éléments donc 2^n parties par hypothèse. Les parties de F se répartissent en deux familles disjointes : celles qui ne contiennent pas x (ce sont les parties de E , au nombre de 2^n) et celles qui contiennent x (elles s'écrivent $A \cup \{x\}$ avec $A \subset E$, donc encore 2^n). Au total $2 \times 2^n = 2^{n+1}$ parties.

Conclusion. Pour $n = 4$, $2^4 = 16$ parties.

20 Nier la convergence d'une suite

★★★

1. Négation : $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| > \varepsilon$.

2. Vers 0 : prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Pour tout N , tout $n \geq N$ vérifie $|u_n - 0| = 1 > \frac{1}{2}$; la négation est vraie, donc (u_n) ne converge pas vers 0.

Vers 1 : prenons $\varepsilon = 1$. Pour tout N , l'entier impair $n = 2N + 1 \geq N$ donne $|u_n - 1| = |-1 - 1| = 2 > 1$. Donc (u_n) ne converge pas vers 1.

21

Une récurrence qui ne peut pas marcher



1. $n = 0 : 41 ; n = 1 : 43 ; n = 2 : 47 ; n = 3 : 53$. Ces quatre nombres sont premiers.
2. Pour $n = 40 : 40^2 + 40 + 41 = 1600 + 81 = 1681 = 41^2$, qui n'est pas premier. Un seul contre-exemple réfute l'assertion universelle.
3. Quelques vérifications (même nombreuses) ne constituent pas une preuve. Une récurrence réussie établirait la propriété pour tout n , y compris **40**, ce qui est faux : l'hérédité est donc nécessairement fausse pour au moins un rang entre **0** et **40**.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Logique et raisonnement : exercices de maths Maths Sup

QCM de maths

Logique et raisonnement : QCM de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Logique et raisonnement : contrôle de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Nombres complexes et trigonométrie : exercices de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Applications et relations : exercices de maths Maths Sup

 QCM de maths

Nombres complexes et trigonométrie : QCM de maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage