

Logique et ensembles : exercices corrigés de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Nier une phrase quantifiée



- a. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \leq 0$. Comme $x^2 \geq 0$, on a $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ pour tout réel : la négation est fausse et la proposition est **vraie**.
- b. Négation : $\forall n \in \mathbb{N}, 2n + 1 \neq 100$. Or $2n + 1$ est impair et 100 est pair, donc l'égalité est impossible : la négation est **vraie**, la proposition est fausse.
- c. Négation : $\exists x \in [0, 1], x^2 > x$. Pour $x \in [0, 1], x^2 - x = x(x - 1) \leq 0$ car $x \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$: la négation est fausse, la proposition est **vraie**.

2 Table de vérité de l'implication



P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg P \vee Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Les trois colonnes sont identiques : les trois propositions sont équivalentes. En particulier $P \Rightarrow Q$ équivaut à $\neg P \vee Q$ et à sa contraposée.

3 Vrai ou faux avec quantificateurs



- Faux.** Contre-exemple : $x = \frac{1}{2}$, $x^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.
- Vrai.** $x = 0$ convient ($0^2 = 0$), de même $x = 1$.
- Vrai.** $n^2 + n = n(n + 1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, dont l'un est pair : le produit est pair.

4 Opérations sur des ensembles de diviseurs



$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$ (8 éléments) et $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ (9 éléments).

$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ (diviseurs de 12, le PGCD).

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36\}$, soit $8 + 9 - 6 = 11$ éléments.

$A \setminus B = \{8, 24\}$ et $B \setminus A = \{9, 18, 36\}$.

5 Couples et produit cartésien



- a. $E \times F = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$ et $F \times E = \{(x, 1), (x, 2), (x, 3), (y, 1), (y, 2), (y, 3)\}$.
- b. $|E \times F| = 3 \times 2 = 6$ et $|E \times E| = 3 \times 3 = 9$.
- c. Non : $(1, x) \in E \times F$ mais $(1, x) \notin F \times E$, car sa première composante **1** n'est pas dans F . Les couples sont ordonnés.

6 Contraposée et réciproque



- a. Contraposée : « si les quatre côtés ne sont pas égaux, alors ce n'est pas un carré » (vraie, comme l'implication). Réciproque : « si les quatre côtés sont égaux, alors c'est un carré » : **fausse**, un losange non rectangle est un contre-exemple.
- b. Contraposée : « si n n'est pas un multiple de **5**, alors n n'est pas un multiple de **10** ». Réciproque : « si n est un multiple de **5**, alors c'en est un de **10** » : **fausse**, $n = 15$.

7 Somme des premiers nombres impairs



Initialisation. Pour $n = 1 : 1 = 1^2$.

Hérédité. Supposons $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$. Alors

$1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$: la propriété est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion. La formule est vraie pour tout $n \geq 1$. Exemple : $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$.

8

Les parties d'un ensemble à trois éléments

★★★

a. Aucun élément : $\emptyset$. Un élément : $\{a\}, \{b\}, \{c\}$. Deux éléments : $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$.

Trois éléments : E . Soit $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$ parties.

b. $2^5 = 32$ parties.

c. $a \in \mathcal{P}(E)$ est **fausse** : a est un élément de E , pas une partie. $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$ est **vraie** car $\{a\} \subset E$.

9

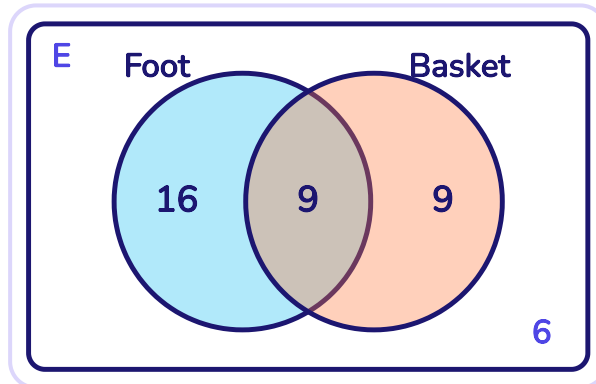
Inclusion-exclusion dans un club

★★★

Notons F et B les ensembles des footballeurs et des basketteurs. Les adhérents qui pratiquent au moins un des deux sports sont $40 - 6 = 34 = |F \cup B|$.

Comme $|F \cup B| = |F| + |B| - |F \cap B|$, on obtient $|F \cap B| = 25 + 18 - 34 = 9$.

Seulement football : $25 - 9 = 16$; seulement basket : $18 - 9 = 9$. Vérification : $16 + 9 + 9 + 6 = 40$.



Réponse : 9 adhérents pratiquent les deux sports et 16 seulement le football.

10 Lois de De Morgan sur un exemple



$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{3, 6, 9\}$, $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$, $A \cap B = \{6\}$.

$\overline{A \cup B} = \{1, 5, 7\}$. D'autre part $\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ et $\overline{B} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$, d'où $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 5, 7\}$: première égalité vérifiée.

$\overline{A \cap B} = E \setminus \{6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$ (9 éléments) et

$\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$: seconde égalité vérifiée.

11 Congruence modulo 5



a. Réflexive : $x - x = 0 = 5 \times 0$. Symétrique : si $x - y = 5k$, alors $y - x = 5(-k)$.

Transitive : si $x - y = 5k$ et $y - z = 5l$, alors $x - z = 5(k + l)$.

b. La classe de **3** est $\{\dots, -7, -2, 3, 8, 13, \dots\}$: les entiers de reste **3** dans la division par **5**. Il y a **5** classes, de restes **0, 1, 2, 3, 4**.

c. $17 - 2 = 15 = 5 \times 3$: oui. $-4 - 1 = -5 = 5 \times (-1)$: oui.

12 Contraposée avec la parité



La contraposée est : « si n est pair, alors $3n + 2$ est pair ».

Supposons $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors $3n + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$, qui est pair.

La contraposée est vraie, donc l'implication « $3n + 2$ impair $\Rightarrow n$ impair » l'est aussi.

13 Une contraposée sur une somme



Contraposée : si $a < 51$ et $b < 51$ (donc $a \leq 50$ et $b \leq 50$ puisque ce sont des entiers), alors $a + b < 101$.

En effet, $a + b \leq 50 + 50 = 100 < 101$. La contraposée est démontrée, donc l'implication de départ est vraie.

14 Une inégalité par récurrence



Initialisation. Pour $n = 0$: $3^0 = 1 \geq 1$.

Hérédité. Supposons $3^n \geq 2n + 1$. Alors $3^{n+1} = 3 \times 3^n \geq 3(2n + 1) = 6n + 3$. Or $6n + 3 \geq 2n + 3 = 2(n + 1) + 1$ car $4n \geq 0$. Donc $3^{n+1} \geq 2(n + 1) + 1$.

Conclusion. L'inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

15 L'ordre des quantificateurs



P_1 est **vraie** : pour un réel x donné, $y = x + 4$ convient, car $x + 4 > x + 3$. Ici y dépend de x .

P_2 est **fausse** : un seul y devrait dépasser $x + 3$ pour tous les x , y compris $x = y$, ce qui donnerait $y > y + 3$, absurde.

Négation de P_2 : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y \leq x + 3$ (prendre $x = y$). Cette négation est vraie.

16 Irrationalité de racine de 3



Supposons $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ avec p, q entiers strictement positifs **premiers entre eux**. Alors

$p^2 = 3q^2$, donc $3 \mid p^2$, donc $3 \mid p$ (si $p = 3k \pm 1$, alors $p^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$ n'est pas divisible par 3).

Écrivons $p = 3k$. Alors $9k^2 = 3q^2$, soit $q^2 = 3k^2$, donc $3 \mid q^2$ puis $3 \mid q$.

Ainsi 3 divise à la fois p et q , ce qui contredit le fait qu'ils soient premiers entre eux.

L'hypothèse est absurde : $\sqrt{3}$ est irrationnel.

17 Divisibilité par 7



Initialisation. $8^0 - 1 = 0$, qui est divisible par 7.

Hérédité. Supposons $8^n - 1 = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$8^{n+1} - 1 = 8 \times 8^n - 1 = 8(8^n - 1) + 8 - 1 = 8 \times 7k + 7 = 7(8k + 1), \text{ multiple de } 7.$$

Conclusion. Pour tout n , $7 \mid 8^n - 1$. Vérification : $8^2 - 1 = 63 = 7 \times 9$.

18 Une équivalence sur les couples d'entiers

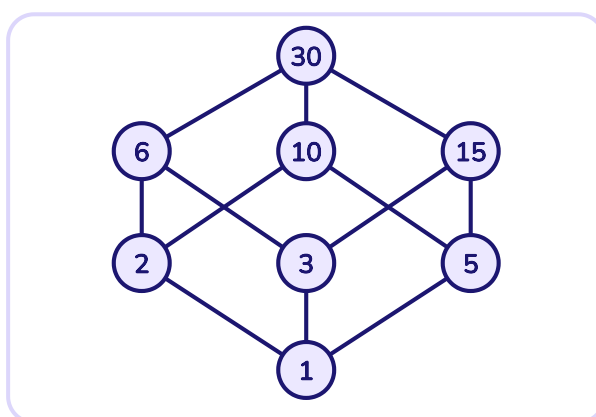


- a. Réflexivité : $a + b = b + a$. Symétrie : si $a + d = b + c$, alors $c + b = d + a$, c'est-à-dire $(c, d) \sim (a, b)$. Transitivité : si $a + d = b + c$ et $c + f = d + e$, l'addition donne $a + d + c + f = b + c + d + e$; en simplifiant par $c + d$, on obtient $a + f = b + e$, c'est-à-dire $(a, b) \sim (e, f)$.
- b. $3 + 3 = 6 = 1 + 5$: oui. La classe de $(3, 1)$ est l'ensemble des couples (a, b) tels que $a + 1 = b + 3$, soit $a - b = 2$: $\{(2, 0), (3, 1), (4, 2), (5, 3), \dots\}$.
- c. $(a, b) \sim (0, 0)$ équivaut à $a + 0 = b + 0$, soit $a = b$: la classe est $\{(n, n) : n \in \mathbb{N}\}$.
Chaque classe correspond à la différence $a - b$, c'est la construction des entiers relatifs.

19 Un ordre partiel sur les diviseurs de 30

★★★

- Réflexive : $a = a \times 1$. Antisymétrique : si $b = ak$ et $a = bl$ avec $k, l \geq 1$, alors $a \leq b \leq a$, donc $a = b$. Transitive : si $b = ak$ et $c = bl$, alors $c = a(kl)$.
- Plus petit élément : 1 (il divise tout). Plus grand : 30.
- Non total : 6 et 10 ne sont pas comparables ($6 \nmid 10, 10 \nmid 6$). Dans $D \setminus \{30\}$, les éléments maximaux sont 6, 10 et 15 : aucun autre élément de cet ensemble n'en est un multiple distinct.
- Diagramme de Hasse (4 niveaux : 1 ; 2, 3, 5 ; 6, 10, 15 ; 30) :



20 L'ordre lexicographique

★★★

- On compare d'abord la première composante : $(1, 3) \preceq (1, 8) \preceq (2, 1) \preceq (2, 5)$.
- Réflexivité** : $a = a$ et $b \leq b$. **Antisymétrie** : si $(a, b) \preceq (c, d)$ et $(c, d) \preceq (a, b)$, alors $a \leq c$ et $c \leq a$, donc $a = c$; puis $b \leq d$ et $d \leq b$, donc $b = d$. **Transitivité** : si $(a, b) \preceq (c, d) \preceq (e, f)$, ou bien $a < c$ ou $c < e$ (l'autre comparaison étant au sens large) et alors $a < e$, ou bien $a = c = e$ et $b \leq d \leq f$, donc $b \leq f$. **Totalité** : deux couples (a, b) et (c, d) vérifient $a < c, a > c$ ou $a = c$; dans le dernier cas, $b \leq d$ ou $d \leq b$. Ils sont donc toujours comparables.

21 Suite à deux pas et récurrence forte



$u_2 = 3 \times 3 - 2 \times 1 = 7$ et $u_3 = 3 \times 7 - 2 \times 3 = 15$. Les valeurs 1, 3, 7, 15 suggèrent $u_n = 2^{n+1} - 1$.

Initialisation. $u_0 = 1 = 2^1 - 1$ et $u_1 = 3 = 2^2 - 1$.

Hérédité. Supposons la formule vraie aux rangs n et $n + 1$. Alors

$$u_{n+2} = 3(2^{n+2} - 1) - 2(2^{n+1} - 1) = 3 \times 2^{n+2} - 3 - 2^{n+2} + 2 = 2 \times 2^{n+2} - 1 = 2^{n+3} -$$

Conclusion. Pour tout n , $u_n = 2^{n+1} - 1$.

22 Suite non bornée



a. Négation : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, |u_n| > M$.

b. Ici $|u_n| = n$. Soit $M \in \mathbb{R}$ quelconque ; l'entier $n = \lfloor |M| \rfloor + 1$ vérifie $n > |M| \geq M$, donc $|u_n| > M$. La négation est vérifiée : la suite n'est pas bornée.

c. Oui : $|v_n| = 1 \leq 1$ pour tout n , donc $M = 1$ convient.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

 **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Logique et ensembles : exercices de maths Licence L1

 QCM de maths

Logique et ensembles : QCM de maths Licence L1

 Contrôles de maths

Logique et ensembles : contrôle de maths Licence L1

 Exercices de maths

Applications et dénombrement : exercices de maths Licence L1

 Exercices de maths

Nombres réels et suites : exercices de maths Licence L1

 QCM de maths

Applications et dénombrement : QCM de maths Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage