

Fonction logarithme népérien : cours de maths Terminale à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Comment mesurer l'intensité d'un séisme, le niveau sonore d'un concert ou l'acidité d'une solution avec des nombres raisonnables, alors que les quantités en jeu s'étendent sur des milliards d'unités ? Grâce à une fonction qui **transforme les produits en sommes** : le logarithme. Dans ce chapitre, tu construis le logarithme népérien comme réciproque de l'exponentielle, tu l'étudies de fond en comble, puis tu t'en sers pour résoudre équations, inéquations et problèmes de croissance.

1. Définition du logarithme népérien

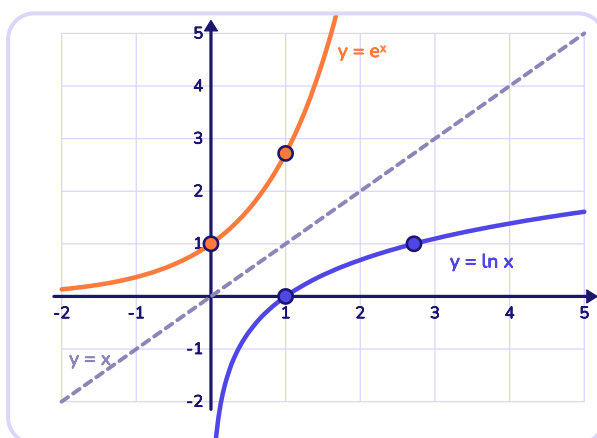
La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec des valeurs qui parcourent tout l'intervalle $]0 ; +\infty[$. Pour chaque réel a strictement positif, l'équation $e^x = a$ possède donc **une unique solution**.

D Logarithme népérien

Pour tout réel $a > 0$, l'unique solution de l'équation $e^x = a$ est notée $\ln a$. La fonction $\ln : x \mapsto \ln x$ est définie sur $]0 ; +\infty[$: c'est la **réciroque** de l'exponentielle.

P Conséquences immédiates

- Pour tout $x > 0$: $e^{\ln x} = x$. Pour tout réel x : $\ln(e^x) = x$.
- $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$.
- Pour $a > 0$ et b réel : $\ln a = b \iff a = e^b$.



Les deux courbes sont **symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$** : le point $(0 ; 1)$ de l'exponentielle devient le point $(1 ; 0)$ du logarithme, et le point $(1 ; e)$ devient $(e ; 1)$.



Domaine de définition

On ne peut calculer $\ln x$ que si $x > 0$. Avant toute résolution, il faut donc écrire la condition d'existence : pour $\ln(5 - 2x)$, il faut $5 - 2x > 0$, c'est-à-dire $x < \frac{5}{2}$.

2. Propriétés algébriques

P

Relations fonctionnelles

Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$ et tout entier relatif n :

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- $\ln(a^n) = n \ln a$ et $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

Preuve de la première. On a $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$. Le nombre $\ln a + \ln b$ est donc la solution de $e^x = ab$, c'est-à-dire $\ln(ab)$. Les autres relations s'en déduisent :

$\ln a + \ln \frac{1}{a} = \ln 1 = 0$, puis une récurrence pour les puissances.

E

Exemple 1 : simplifier une expression

Écrire $A = \ln 40 - 3 \ln 2$ avec un seul logarithme.

$$3 \ln 2 = \ln(2^3) = \ln 8, \text{ donc } A = \ln 40 - \ln 8 = \ln \frac{40}{8} = \ln 5.$$

⚠

Erreurs classiques

$\ln(a + b)$ n'est pas $\ln a + \ln b$, et $\ln(a \times b)$ n'est pas $\ln a \times \ln b$. Par exemple, $\ln 2 + \ln 3 = \ln 6$, mais $\ln 5 \neq \ln 2 + \ln 3$.

3. Étude de la fonction logarithme népérien

P Dérivée et variations

La fonction **ln** est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Cette dérivée étant strictement positive, **ln** est **strictement croissante**.

On en tire des équivalences très utiles : pour $a > 0$ et $b > 0$,

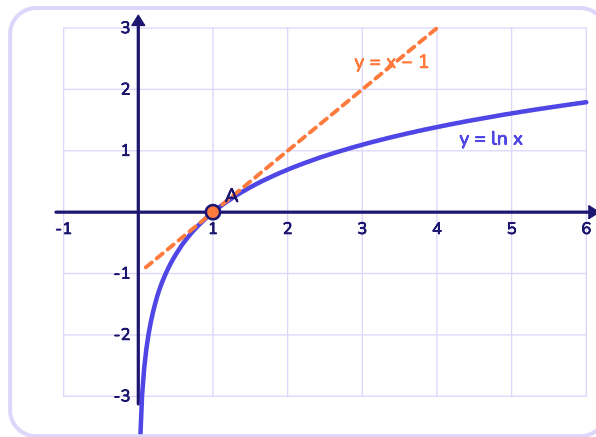
- $\ln a = \ln b \iff a = b$;
- $\ln a < \ln b \iff a < b$;
- $\ln x > 0 \iff x > 1$ et $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$.

P Limites aux bornes

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$: l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe.

x	0	1	$+\infty$
signe de $\ln x$	 	− puis +	
variations de $\ln$	$-\infty$	0 en $x = 1$	$+\infty$
signe de $\ln'(x)$	 	+	+

La tangente au point d'abscisse **1** a pour pente $\ln'(1) = 1$ et passe par $A(1; 0)$: son équation est $y = x - 1$.



4. Dérivée de $\ln(u)$

P

Dérivation d'une composée

Si u est dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

E

Exemple 2 : étudier une fonction de la forme $\ln(u)$

Soit $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$. Le trinôme $x^2 - 4x + 5$ a pour discriminant $16 - 20 = -4 < 0$ et un coefficient dominant positif : il est strictement positif sur $\mathbb{R}$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \frac{2x - 4}{x^2 - 4x + 5}$, du signe de $2x - 4$. La fonction f décroît sur $] -\infty ; 2]$, croît sur $[2 ; +\infty[$, et son minimum vaut $f(2) = \ln(4 - 8 + 5) = \ln 1 = 0$.

M

Méthode : étudier $\ln(u)$

1. Détermine où $u(x) > 0$: c'est le domaine.
2. Calcule $\frac{u'(x)}{u(x)}$; comme $u(x) > 0$, le signe est celui de $u'(x)$.
3. Dresse le tableau de variations et calcule les valeurs ou limites utiles.

5. Limites et croissances comparées

P

Croissances comparées

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0. \text{ Plus généralement, pour tout entier } n \geq 1 :$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0.$$

En clair : en $+\infty$, le logarithme croît **beaucoup plus lentement** que n'importe quelle puissance de x . Pour passer de $\ln x = 10$ à $\ln x = 20$, il faut passer de $x \approx 22\,026$ à $x \approx 485\,000\,000$!

P

Une limite issue du nombre dérivé

Comme $\ln'(1) = 1$ et $\ln 1 = 0$, on a $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

E**Exemple 3 : lever une forme indéterminée**

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 3 \ln x)$.

Pour $x > 0$: $x - 3 \ln x = x \left(1 - 3 \frac{\ln x}{x} \right)$. Or $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$, donc la parenthèse tend vers 1 et le produit vers $+\infty$.

!**Astuce de Zyro**

Quand tu vois « $+\infty - \infty$ » avec un logarithme, factorise le terme dominant (ici x) : le logarithme n'y est plus qu'un petit poids mort devant x .

6. Équations et inéquations**M****Méthode**

1. Écris les conditions d'existence (chaque argument d'un **ln** doit être strictement positif).
2. Regroupe pour obtenir **ln A = ln B** (ou **ln A = k**).
3. Reviens aux arguments : **A = B** (ou **A = e^k**) ; pour une inéquation, la croissance de **ln** conserve le sens.
4. Garde uniquement les solutions qui vérifient les conditions d'existence.

E**Exemple 4 : une équation**

Résoudre $\ln(x + 3) + \ln(x - 1) = \ln 5$.

Conditions : $x + 3 > 0$ et $x - 1 > 0$, donc $x > 1$. L'équation s'écrit

$\ln((x + 3)(x - 1)) = \ln 5$, soit $x^2 + 2x - 3 = 5$, c'est-à-dire $x^2 + 2x - 8 = 0$, de racines 2 et -4. Seule 2 vérifie $x > 1$: $S = \{2\}$.

E**Exemple 5 : une inéquation**

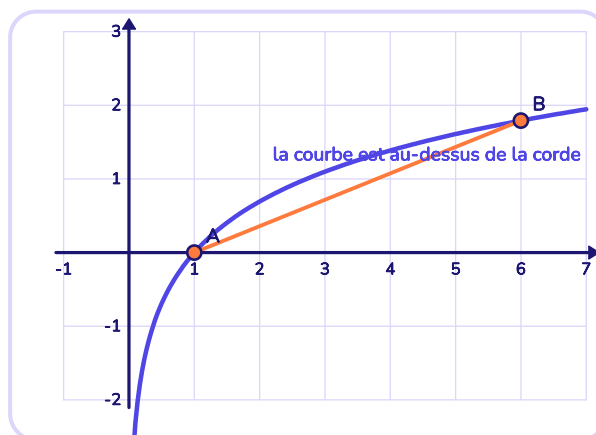
Résoudre $\ln(2x - 1) \leq 3$.

Condition : $x > \frac{1}{2}$. Alors $\ln(2x - 1) \leq 3 \iff 2x - 1 \leq e^3 \iff x \leq \frac{1 + e^3}{2}$.

Donc $S = \left] \frac{1}{2} ; \frac{1 + e^3}{2} \right]$.

7. Concavité de la fonction $\ln$

La dérivée seconde de $\ln$ est $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$, strictement négative sur $]0 ; +\infty[$: la fonction $\ln$ est **concave**. Sa courbe est située **au-dessus de chacune de ses cordes** et **au-dessous de chacune de ses tangentes**.



P Une inégalité à connaître

La courbe étant sous sa tangente au point d'abscisse 1 (d'équation $y = x - 1$), on a pour tout $x > 0$:

$$\ln x \leq x - 1,$$

avec égalité seulement pour $x = 1$.

8. Logarithme décimal et suites géométriques

D Logarithme décimal

Le logarithme décimal d'un réel $x > 0$ est $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$. Il vérifie $\log 10^n = n$ et les mêmes relations algébriques que $\ln$.

Il sert à compter les chiffres : un entier N possède $\lfloor \log N \rfloor + 1$ chiffres.

N	9	250	10^6	2^{30}
$\log N$	0,95	2,40	6	9,03
nombre de chiffres	1	3	7	10

E**Exemple 6 : seuil d'une suite géométrique**

Un capital de 5 000 € placé à 4 % par an vaut $C_n = 5\,000 \times 1,04^n$ après n ans.

Quand dépasse-t-il 8 000 € ?

$$5\,000 \times 1,04^n > 8\,000 \iff 1,04^n > 1,6 \iff n \ln 1,04 > \ln 1,6 \iff n > \frac{\ln 1,6}{\ln 1,04}$$

(on a divisé par $\ln 1,04 > 0$). Il faut donc $n = 12$ ans.

**Sens de l'inégalité**

Si la raison q est comprise entre 0 et 1, alors $\ln q < 0$: en divisant par $\ln q$, l'inégalité change de sens.

À retenir

- $\ln$ est la réciproque de $\exp$: $e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$, $\ln(e^x) = x$, $\ln 1 = 0$, $\ln e = 1$.
- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, $\ln(a^n) = n \ln a$; $\ln(a + b)$ ne se simplifie pas.
- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$: $\ln$ est strictement croissante, de limites $-\infty$ en 0^+ et $+\infty$ en $+\infty$;
 $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- Croissances comparées : $\frac{\ln x}{x} \rightarrow 0$ en $+\infty$ et $x \ln x \rightarrow 0$ en 0^+ .
- Pour résoudre : conditions d'existence, $\ln A = \ln B \iff A = B$,
 $\ln A < \ln B \iff A < B$, puis tri des solutions.
- $\ln$ est concave et $\ln x \leq x - 1$; $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$ pour compter les chiffres et résoudre $q^n > k$.

Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Terminale

Changer de niveau

Niveau : **Terminale**

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Fonction logarithme népérien : exercices de maths Terminale



Contrôles de maths

Fonction logarithme népérien : contrôle de maths Terminale

 QCM de maths

Fonction logarithme népérien : QCM de maths Terminale

 Exercices de maths

Primitives et équations différentielles : exercices de maths Terminale

 Exercices de maths

Calcul intégral : exercices de maths Terminale

 Contrôles de maths

Primitives et équations différentielles : contrôle de maths Terminale

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage