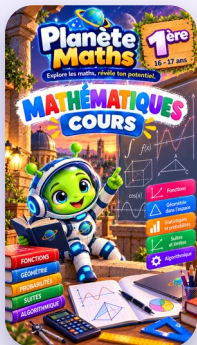


Limites de fonctions : cours de maths Terminale à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Que devient une valeur quand on la pousse très loin, ou qu'on s'approche d'un point interdit ? Une tasse de thé finit par atteindre la température de la pièce, une population de poissons plafonne, un taux de remplissage ne dépasse jamais 100 %. Les **limites de fonctions** donnent un langage précis pour décrire ces comportements, et elles te permettent de repérer les asymptotes d'une courbe. Dans ce chapitre, tu apprends à lire une limite, à la calculer et à lever les cas difficiles.

1. Limite d'une fonction en l'infini

D Limite infinie en $+\infty$

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand. On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

D Limite finie en $+\infty$

On dit que f tend vers le réel ℓ quand x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que x est assez grand. On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Les définitions en $-\infty$ sont analogues, avec x « assez négatif ». Une fonction n'a pas toujours de limite : $\cos x$ oscille sans jamais se stabiliser quand $x \rightarrow +\infty$.

P Limites de référence en l'infini

Pour tout entier $n \geq 1$:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ si n est pair et $-\infty$ si n est impair.

E**Exemple 1**

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 1}{2x^2 + x - 7}$.

Le numérateur et le dénominateur tendent vers $+\infty$: on factorise le terme dominant.

$$\text{Pour } x \neq 0, \frac{5x^2 - 3x + 1}{2x^2 + x - 7} = \frac{x^2 \left(5 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{7}{x^2}\right)} = \frac{5 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{7}{x^2}}.$$

Comme $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ tendent vers 0, le quotient tend vers $\frac{5}{2}$.

2. Limite en un point

Quand x s'approche d'un réel a , on distingue l'approche **par la gauche** (x par la droite ($x > a$, notée $x \rightarrow a^+$). Si les deux limites existent et sont égales, c'est la limite en a .

P**Limites de référence en 0**

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Plus généralement, pour une puissance paire, la limite en 0 est $+\infty$ des deux côtés ; pour une puissance impaire, elle change de signe selon le côté.

Pour une fonction construite avec des opérations usuelles (polynôme, fraction, racine, exponentielle) et définie en a , la limite en a est tout simplement la valeur $f(a)$. Le problème apparaît quand le dénominateur s'annule.

E

Exemple 2

Étudie $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$ en 3.

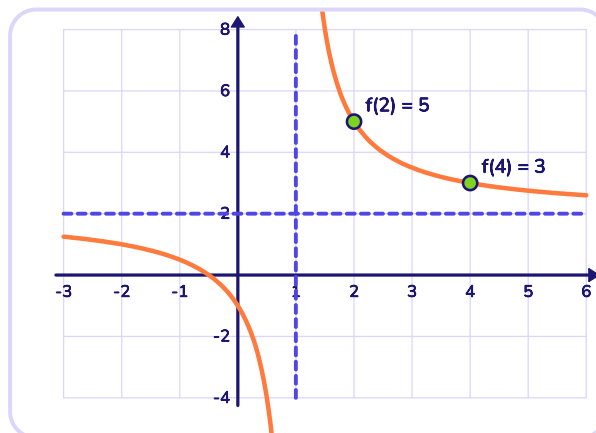
Le numérateur tend vers 4, strictement positif. Pour $x \rightarrow 3^+$, $x - 3$ tend vers 0 par valeurs positives, donc $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$. Pour $x \rightarrow 3^-$, $x - 3$ tend vers 0 par valeurs négatives, donc $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$. La fonction n'a pas de limite en 3.

3. Asymptotes horizontales et verticales

D

Asymptotes

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ (ou en $-\infty$), la droite d'équation $y = \ell$ est une **asymptote horizontale** à la courbe.
- Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$, la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale**.



Sur la figure, la fonction $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ s'écrit aussi $2 + \frac{3}{x-1}$: elle tend vers 2 en $\pm\infty$ (asymptote $y = 2$) et explose près de 1 (asymptote $x = 1$).

4. Opérations sur les limites

Pour trouver la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient, on combine les limites de chaque morceau. Dans les tableaux, ℓ et ℓ' sont des réels et « FI » signifie forme indéterminée.

$\lim f$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f + g)$	$\ell + \ell'$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

$\lim f$	$\ell \neq 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(f \times g)$	$\pm\infty$ (règle des signes)	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Pour un quotient $\frac{f}{g}$:

- si $\lim g = \ell' \neq 0$, la limite est $\frac{\lim f}{\ell'}$;
- si $\lim f = \ell$ et $\lim g = \pm\infty$, la limite est 0 ;
- si $\lim f = \ell \neq 0$ et $\lim g = 0$, la limite est infinie, son signe se déduit du signe de g près du point ;
- les cas $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$ sont des formes indéterminées.



Attention au signe de zéro

Écrire « $\frac{4}{0} = +\infty$ » est faux : il faut préciser si le dénominateur tend vers 0 par valeurs positives (noté 0^+) ou négatives (0^-). Étudie son signe avant de conclure.

5. Formes indéterminées

Les quatre formes à connaître sont $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$. Dans ces cas, les règles ne permettent pas de conclure : la limite peut valoir n'importe quoi, il faut transformer l'expression.

M

Lever une forme indéterminée

1. Pour un polynôme ou une fraction rationnelle en $\pm\infty$: factoriser le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur.
2. Pour $\frac{0}{0}$ avec des polynômes : factoriser et simplifier le facteur qui s'annule.
3. Pour une différence de racines : multiplier et diviser par la quantité conjuguée.
4. Pour mélanger x , $\ln x$ et e^x : utiliser les croissances comparées.

E

Exemple 3

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$: c'est une forme $\infty - \infty$.

On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2 + 4x} - x = \frac{(x^2 + 4x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x} + x} = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4x} + x}.$$

Pour $x > 0$, on divise par x : $\frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + 1}$, qui tend vers $\frac{4}{1 + 1} = 2$.

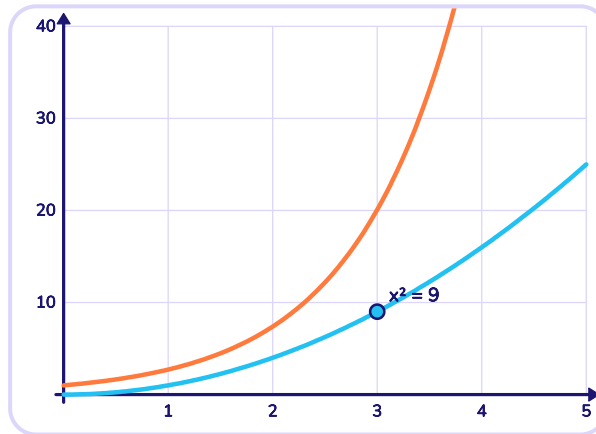
6. Croissances comparées

P

Croissances comparées

Pour tout entier $n \geq 1$:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0$.



En un mot : l'exponentielle écrase les puissances, et les puissances écrasent le logarithme.

E

Exemple 4

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x)e^{-x}$.

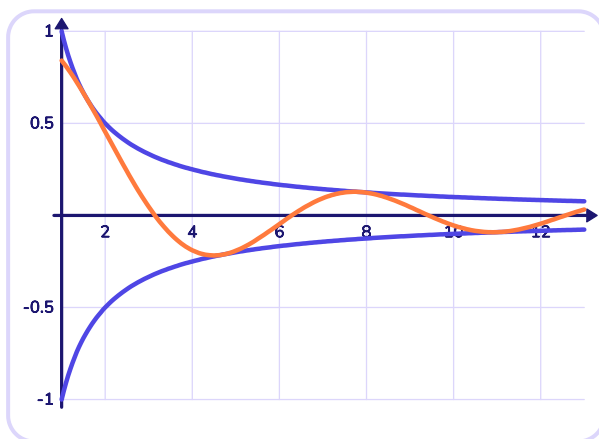
On développe : $(x^2 - 3x)e^{-x} = x^2 e^{-x} - 3x e^{-x}$. Par croissances comparées, $x^2 e^{-x} \rightarrow 0$ et $x e^{-x} \rightarrow 0$. La limite vaut donc 0.

7. Théorèmes de comparaison

P

Comparaison et gendarmes

- Si $f(x) \geq g(x)$ pour x assez grand et $\lim g = +\infty$, alors $\lim f = +\infty$. Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim g = -\infty$, alors $\lim f = -\infty$.
- Théorème des gendarmes : si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour x assez grand et si $\lim g = \lim h = \ell$, alors $\lim f = \ell$.



E

Exemple 5

Montre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin x) = +\infty$, puis que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Pour tout x , $\sin x \geq -1$, donc $x + \sin x \geq x - 1$. Or $x - 1 \rightarrow +\infty$: par comparaison, $x + \sin x \rightarrow +\infty$.

Pour $x > 0$, $-1 \leq \sin x \leq 1$ donne $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$. Les deux bornes tendent vers 0 : d'après le théorème des gendarmes, $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$.

8. Limite d'une composée

P

Composée

Soit a , b et c des éléments de $\mathbb{R}$ ou égaux à $\pm\infty$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

M

Méthode

1. Repère la fonction « intérieure » f et la fonction « extérieure » g .
2. Calcule la limite b de f .
3. Calcule la limite de g en b : c'est la réponse.

E

Exemple 6

Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-1/x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x+1}{x}}$.

Pour la première, $-\frac{1}{x} \rightarrow 0$ et $e^y \rightarrow e^0 = 1$ quand $y \rightarrow 0$, donc la limite vaut 1. Pour la seconde, $\frac{2x+1}{x} = 2 + \frac{1}{x} \rightarrow 2$, puis $\sqrt{y} \rightarrow \sqrt{2}$ en 2 : la limite vaut $\sqrt{2}$.

!

Astuce de Zyro

Sur ma planète, on dit qu'une limite est une promesse : « Si tu t'approches assez, je me rapproche autant que tu veux. » Avant de calculer, demande-toi toujours vers quoi tend chaque morceau, et si le signe d'un zéro compte !

À retenir

- $\lim f = \ell$ en $\pm\infty$ donne l'asymptote horizontale $y = \ell$; une limite infinie en a donne l'asymptote verticale $x = a$.
- En un point où le dénominateur s'annule, étudie la limite à gauche et à droite en précisant le signe de 0^+ ou 0^- .
- Les quatre formes indéterminées sont $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$: on les lève en factorisant, en simplifiant ou avec la quantité conjuguée.
- Croissances comparées : e^x l'emporte sur x^n , qui l'emporte sur $\ln x$.
- Comparaison : minorer par une fonction qui tend vers $+\infty$, ou encadrer avec les gendarmes.
- Composée : on enchaîne les limites, de l'intérieur vers l'extérieur.

Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Terminale

Changer de niveau

Niveau : **Terminale**

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Limites de fonctions : exercices de maths
Terminale

 Contrôles de maths

Limites de fonctions : contrôle de maths
Terminale

 QCM de maths

Limites de fonctions : QCM de maths
Terminale

 Exercices de maths

Continuité et théorème des valeurs
intermédiaires : exercices de maths
Terminale

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Dérivation et convexité : exercices de maths Terminale

Continuité et théorème des valeurs intermédiaires : contrôle de maths Terminale

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage