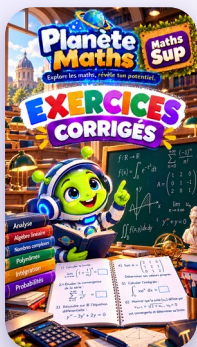


# Limites et continuité : exercices de maths Maths Sup à télécharger en PDF



## Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

21 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

### 1 Limites de fractions rationnelles

★ ★ ★

Calcule : a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - x}{2x^3 + 5}$  ; b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$  ; c)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 + x}{x^2 - 1}$ .

### 2 Limite à gauche, limite à droite

★ ★ ★

Soit  $f(x) = \frac{x - 2}{|x - 2|}$  pour  $x \neq 2$ . Calcule la limite à gauche et la limite à droite de  $f$  en 2.  $f$  admet-elle une limite en 2 ?

### 3 Raccorder deux morceaux



On définit  $f(x) = x^2 + 1$  si  $x \leq 1$  et  $f(x) = ax + 3$  si  $x > 1$ . Détermine le réel  $a$  pour que  $f$  soit continue en 1.

### 4 Vrai ou faux ?



Dis si chaque affirmation est vraie ou fausse, en justifiant.

- a. Si  $f$  est continue en  $a$ , alors  $f$  admet une limite finie en  $a$ .
- b. Si  $f$  est définie en  $a$  et admet une limite finie en  $a$ , alors  $f$  est continue en  $a$ .
- c. Si  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  avec  $f(0) < 0 < f(1)$ , alors  $f$  s'annule sur  $]0, 1[$ .
- d. La fonction  $x \mapsto 1/x$  atteint ses bornes sur  $]0, 1]$ .

### 5 Trois solutions



Montre que l'équation  $x^3 - 4x + 1 = 0$  possède au moins une solution dans chacun des intervalles  $] - 3, -2[$ ,  $]0, 1[$  et  $]1, 2[$ . Combien de solutions réelles a-t-elle exactement ?

### 6 Équivalents simples

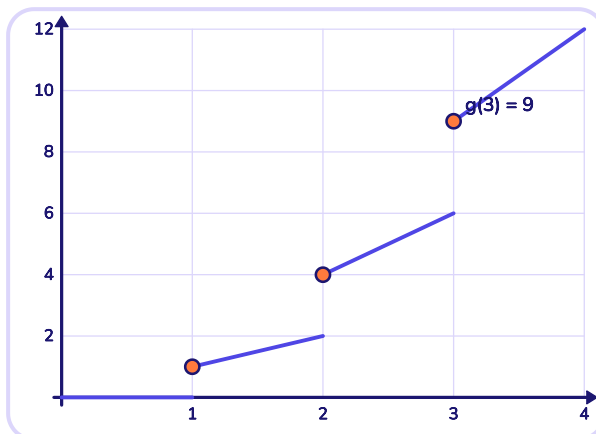


Donne un équivalent simple : a)  $3x^4 - x^2 + 2$  en  $+\infty$  ; b)  $\sin(5x)$  en 0 ; c)  $1 - \cos x$  en 0 ; d)  $\ln(1 + 4x)$  en 0. En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\ln(1 + 4x)}$ .

## 7 Une fonction à sauts



Soit  $g(x) = x[x]$  sur  $[0, 4]$  (où  $[x]$  est la partie entière). Étudie la continuité de  $g$  en  $3$ , à gauche puis à droite, en t'aidant du graphe : les segments sont ouverts à leur extrémité droite.



## 8 Une racine carrée conjuguée



Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x)$ .

## 9 Encadrement



Soit  $f(x) = \frac{3x + \cos x}{x - 1}$  pour  $x > 1$ . Montre que  $f$  tend vers  $3$  en  $+\infty$ .

## 10 Prolonger par continuité



Soit  $f(x) = \frac{\sqrt{x+9} - 3}{x}$  pour  $x \geq -9$  et  $x \neq 0$ . Montre que  $f$  se prolonge par continuité en  $0$  et donne la valeur du prolongement.

## 11 Limites et équivalents



Calcule : a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1 + 3x)}$  ; b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$  ; c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3x)}{\sin x}$ .

## 12 Un point fixe du cosinus

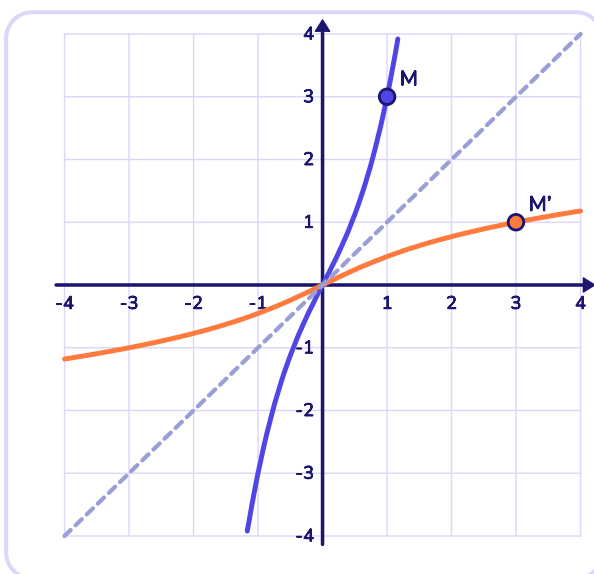
★★★

Montre que l'équation  $\cos x = x$  a une unique solution dans  $[0, 1]$ , puis encadre-la entre deux décimaux à 0,1 près.

## 13 Une bijection et sa réciproque

★★★

Soit  $f(x) = x^3 + 2x$ . Montre que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ , puis donne  $f^{-1}(3)$ ,  $f^{-1}(12)$  et  $f^{-1}(-3)$ . Explique la symétrie des courbes sur la figure.



## 14 Image d'un segment

★★★

Soit  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ . Détermine l'image de  $[0, 3]$  par  $f$ , puis l'image de  $[0, +\infty[$  et celle de  $\mathbb{R}$ .

## 15 Deux points à même température

★★★★

La température  $f(t)$  est relevée en continu pendant une journée entière,  $t \in [0, 1]$  (unité : la journée), et  $f(0) = f(1)$ . Montre qu'il existe deux instants séparés d'une demi-journée où la température est la même.

## 16 Périodique et limite finie



Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et  $T$ -périodique ( $T > 0$ ).

- On suppose que  $f$  admet une limite finie  $\ell$  en  $+\infty$ . Montre que  $f$  est constante.
- En déduire que  $\cos$  n'a pas de limite en  $+\infty$ .
- Soit  $h$  continue sur  $[0, +\infty[$  avec une limite finie en  $+\infty$ . Montre que  $h$  est bornée.

## 17 Racine carrée et carré



- Montre que pour  $x \geq y \geq 0$ ,  $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y}$ . En déduire que  $\sqrt{\cdot}$  est uniformément continue sur  $[0, +\infty[$ .
- Montre que  $x \mapsto x^2$  est lipschitzienne sur  $[0, 3]$ , de rapport 6.
- Montre que  $x \mapsto x^2$  n'est pas uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

## 18 L'inverse n'est pas uniforme



- Montre que  $x \mapsto 1/x$  est continue sur  $]0, 1]$  mais n'y est pas uniformément continue (indice :  $x_n = \frac{1}{n}$  et  $y_n = \frac{1}{2n}$ ).
- Montre qu'elle est lipschitzienne sur  $[\frac{1}{2}, 1]$  et donne un rapport.

## 19 Limites exponentielles



Calcule : a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$  ; b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$  ; c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$ .

## 20 Les racines de $x^3 - 3x + 1$



- a. Dresse le tableau de variations de  $f(x) = x^3 - 3x + 1$  et montre, avec le théorème de la bijection, que  $f(x) = 0$  a exactement trois solutions  $\alpha < \beta < \gamma$ . Localise-les dans  $] -2, -1[$ ,  $]0, 1[$  et  $]1, 2[$ .
- b. En posant  $x = 2 \cos \theta$  avec  $\theta \in ]0, \pi[$ , donne les valeurs exactes de ces trois solutions.

## 21 Continue et injective



Soit  $f$  continue sur un intervalle  $I$ . On suppose qu'il existe  $a < b < c$  dans  $I$  avec  $f(b) > \max(f(a), f(c))$ .

- a. Choisis un réel  $y$  avec  $\max(f(a), f(c)) < y < f(b)$  et montre que  $f$  prend la valeur  $y$  en deux points distincts.
- b. Conclus : une fonction continue et injective sur un intervalle n'a pas de « bosse » intérieure.
- c. Vérifie que  $x \mapsto x^3 - 3x$  n'est pas injective sur  $[-2, 2]$ .

### Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 **Zyro te conseille la suite**

✓ Exercices corrigés de maths

Limites et continuité : exercices corrigés de maths Maths Sup

■ Cours de maths

Limites et continuité : cours de maths Maths Sup

🎯 QCM de maths

Limites et continuité : QCM de maths Maths Sup

✓ Exercices corrigés de maths

Dérivation et développements limités : exercices corrigés de maths Maths Sup

✓ Exercices corrigés de maths

Intégration et primitives : exercices corrigés de maths Maths Sup

■ Cours de maths

Dérivation et développements limités : cours de maths Maths Sup

## Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage