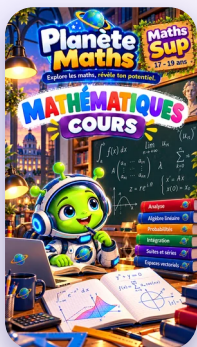


Limites et continuité : cours de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Tracer une courbe sans lever le crayon, résoudre une équation dont on ne sait pas écrire la solution, prouver qu'une fonction atteint un maximum : toutes ces idées reposent sur deux notions voisines, la **limite** et la **continuité**. Ce chapitre les formalise avec la rigueur d'une classe préparatoire, puis en tire les grands théorèmes : valeurs intermédiaires, bornes atteintes, bijection, et enfin continuité uniforme.

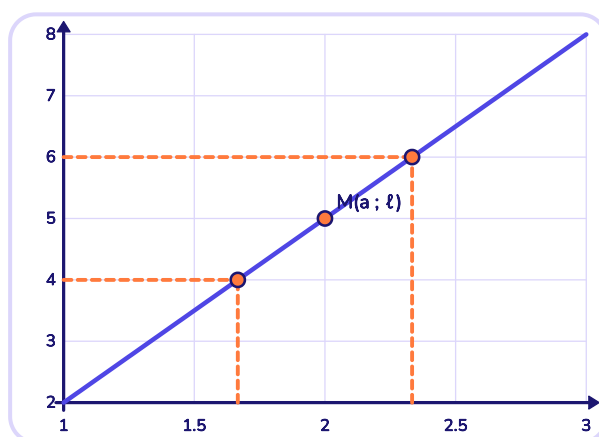
1. Limite d'une fonction

D Limite finie en un point

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D (il existe des points de D arbitrairement proches de a). On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Les autres cas se lisent en adaptant les deux membres de l'implication : pour $a = +\infty$, la condition $|x - a| \leq \delta$ devient $x \geq B$; pour $\ell = +\infty$, la condition $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ devient $f(x) \geq A$, où A est un réel arbitraire. On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.



Sur la figure, on se donne la tolérance verticale $\varepsilon = 1$ autour de la limite **5**. Il suffit alors de rester dans la bande verticale $|x - 2| \leq \frac{1}{3}$ pour que la courbe reste dans la bande horizontale.

P**Propriétés**

- **Unicité** : si une limite existe, elle est unique.
- Si $a \in D$ et si f admet une limite finie en a , alors cette limite vaut $f(a)$, car $x = a$ est autorisé dans la définition.
- **Caractérisation séquentielle** : $\lim_a f = \ell$ si et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de D qui tend vers a , la suite $(f(u_n))$ tend vers ℓ .
- On définit de même la limite à gauche $\lim_{x \rightarrow a^-} f$ et la limite à droite $\lim_{x \rightarrow a^+} f$, en travaillant sur $D \cap]-\infty, a[$ ou $D \cap]a, +\infty[$.

E**Exemple 1 : une limite par epsilon**

Montrons que $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout réel x ,
 $|(3x - 1) - 5| = 3|x - 2|$. Il suffit donc de choisir $\delta = \varepsilon/3$: si $|x - 2| \leq \delta$, alors
 $|f(x) - 5| \leq 3\delta = \varepsilon$. Le réel δ dépend de ε , pas de x .

2. Opérations, composition et inégalités

P

Calcul sur les limites

Si f et g ont des limites en a , alors $f + g$, fg et f/g (quand g ne s'annule pas) ont pour limites la somme, le produit et le quotient des limites, **sauf** dans les quatre formes indéterminées $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, ∞/∞ et $0/0$.

Composition : si $\lim_a f = b$ et $\lim_b g = \ell$, alors $\lim_a g \circ f = \ell$.

Inégalités : si $f \leq g$ au voisinage de a et si les deux limites existent, alors $\lim_a f \leq \lim_a g$. Attention, les inégalités strictes deviennent larges à la limite.

Théorème des gendarmes : si $g \leq f \leq h$ au voisinage de a et si g et h tendent toutes deux vers ℓ , alors f tend vers ℓ .

Limite monotone : une fonction croissante sur $]a, b[$ admet une limite en a^+ et en b^- ; ces limites sont finies si la fonction est minorée (en a) ou majorée (en b).

M

Lever une forme indéterminée

1. Pour un quotient de polynômes en $\pm\infty$, factoriser le terme de plus haut degré.
2. Avec des racines carrées, multiplier par la **quantité conjuguée**.
3. Pour $0/0$ avec une racine ou une factorisation évidente, simplifier le facteur qui s'annule.
4. En dernier recours, passer aux équivalents (partie 3).

E Exemple 2 : quantité conjuguée

Pour $x > -1$ et $x \neq 0$,

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}.$$

Cette expression tend vers $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ quand x tend vers 0.

3. Comparaison locale

D Domination, négligeabilité, équivalence

Soit g ne s'annulant pas au voisinage de a (sauf peut-être en a). On écrit :

- $f = O(g)$ en a si f/g est bornée au voisinage de a ;
- $f = o(g)$ en a si f/g tend vers 0 ;
- $f \sim g$ en a si f/g tend vers 1, ce qui équivaut à $f - g = o(g)$.

Les équivalents usuels en 0 sont les plus utiles : $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$ et $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$. Les **croissances comparées** disent qu'en $+\infty$, $\ln x = o(x^\alpha)$ et $x^\alpha = o(e^x)$ pour tout $\alpha > 0$.

P Règles de calcul

La relation $\sim$ est compatible avec le produit, le quotient et les puissances. Si $f \sim g$ et si g tend vers ℓ , alors f tend aussi vers ℓ . On peut composer à droite : si $f \sim g$ en b et si $u(x) \rightarrow b$ quand $x \rightarrow a$, alors $f \circ u \sim g \circ u$ en a .



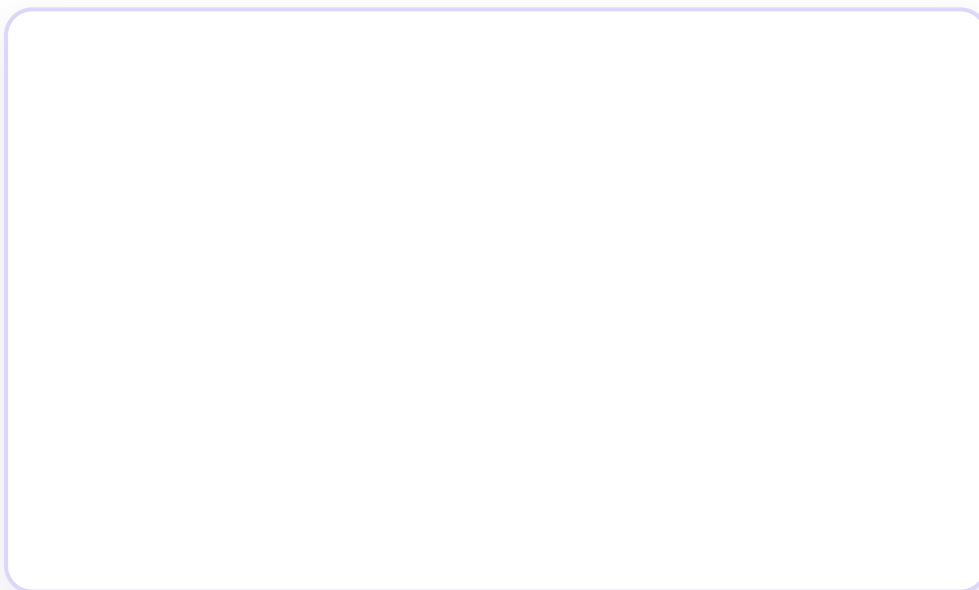
Ce qu'on n'a pas le droit de faire

On n'additionne pas des équivalents : en $+\infty$, $x + 1 \sim x$ et $-x \sim -x$, mais la somme vaut **1**, qui n'est pas équivalente à **0**. On ne compose pas à gauche non plus : en $+\infty$, $x^2 + x \sim x^2$, pourtant $e^{x^2+x}/e^{x^2} = e^x \rightarrow +\infty$.



Exemple 3 : limite par équivalents

En **0**, $e^{3x} - 1 \sim 3x$ et $\sin(2x) \sim 2x$. Donc $\frac{e^{3x} - 1}{\sin(2x)} \sim \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$, et la limite en **0** vaut $\frac{3}{2}$.



Continuité fonctions Maths Sup : courbe de $x \sin(1/x)$ oscillant entre les droites $y = x$ et $y = -x$ près de l'origine, exemple de limites par encadrement (théorème des gendarmes)

Sur cette figure, la fonction $x \mapsto x \sin(1/x)$ oscille sans cesse près de **0**, mais elle reste enfermée entre $-|x|$ et $|x|$: par encadrement, sa limite en **0** vaut **0**. On a $f = O(x)$, sans équivalent plus simple.

4. Continuité en un point

D Continuité

Soit f définie sur un intervalle I et $a \in I$. La fonction f est **continue en a** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Elle est continue sur I si elle est continue en tout point de I . On parle de continuité **à gauche** ou **à droite** en a quand la limite à gauche ou à droite vaut $f(a)$.

Par la caractérisation séquentielle, f est continue en a si et seulement si $f(u_n) \rightarrow f(a)$ pour toute suite (u_n) qui tend vers a . Les sommes, produits, quotients (dénominateur non nul) et composées de fonctions continues sont continues ; les polynômes, **exp**, **ln**, **sin**, **cos**, les puissances et la valeur absolue sont continus sur leur domaine.

E Exemple 4 : prolongement par continuité

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$ pour $x > 0, x \neq 1$. Comme $x - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$, on a $f(x) = (\sqrt{x} + 1)(x + 1)$, qui tend vers $2 \times 2 = 4$ en 1. La fonction se prolonge donc par continuité en posant $f(1) = 4$.

⚠ Limite et continuité ne sont pas synonymes

Une fonction peut avoir une limite en a sans être continue en a : c'est le cas de $f(x) = 1$ pour $x \neq 0$ avec $f(0) = 0$. La partie entière est continue en tout point non entier, mais en un entier n elle est continue à droite (valeur n) et pas à gauche (limite $n - 1$).

5. Théorème des valeurs intermédiaires

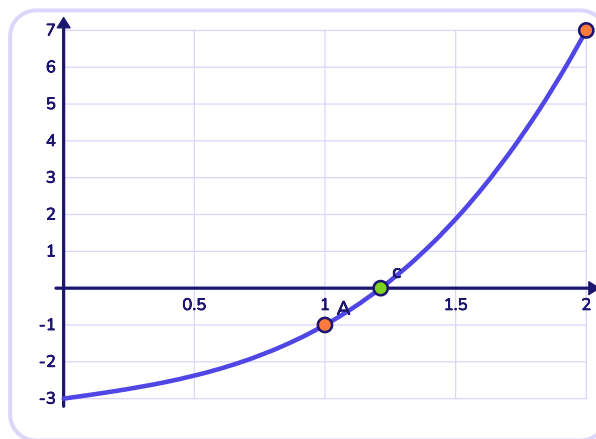
P

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Soit f continue sur un intervalle I et $a, b \in I$. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = y$.

Idée de la preuve. Supposons $a < b$, $f(a) \leq 0 \leq f(b)$, et posons $S = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq 0\}$, $c = \sup S$. Par continuité, $f(c) \leq 0$. Si $f(c)$ était strictement négatif, la continuité donnerait des points $x > c$ avec $f(x) < 0$, ce qui contredit la définition de c ; donc $f(c) = 0$.

Conséquences : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, et une fonction continue qui ne s'annule pas sur un intervalle y garde un signe constant.



M

Montrer qu'une équation a une solution

1. Vérifier la continuité de f sur un intervalle.
2. Trouver a, b avec $f(a)$ et $f(b)$ de signes contraires.
3. Conclure avec le TVI ; si f est strictement monotone, la solution est unique.
4. Pour la localiser, couper l'intervalle en deux : c'est la **dichotomie**.

E**Exemple 5 : une racine localisée**

Soit $f(x) = x^3 + x - 3$, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 7 > 0$: il existe un unique $c \in]1, 2[$ tel que $f(c) = 0$. Puis $f(1,2) = -0,072 < 0$ et $f(1,3) = 0,497 > 0$, donc $1,2 < c < 1,3$.

!**Astuce de Zyro**

Sur ma planète, on dit que si un explorateur part sous le niveau de la mer et arrive au-dessus, il a forcément marché à la hauteur exacte de la mer : c'est le TVI, sans changer un mot !

6. Image d'un segment**P****Théorème des bornes atteintes**

Si f est continue sur un **segment** $[a, b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes : il existe $x_m, x_M \in [a, b]$ tels que $f(x_m) = \min f$ et $f(x_M) = \max f$. Avec le TVI, l'image du segment $[a, b]$ est le segment $[m, M]$, où $m = \min f$ et $M = \max f$.

Idée de la preuve. Soit $M = \sup f([a, b])$ (éventuellement $+\infty$). On choisit des points x_n tels que $f(x_n) \rightarrow M$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass fournit une sous-suite qui converge vers un point $c \in [a, b]$. La continuité donne $f(c) = M$, donc M est fini et atteint.



Les hypothèses sont indispensables

La fonction $x \mapsto 1/x$ est continue sur $]0, 1]$, mais non bornée. La fonction $x \mapsto x$ est continue et bornée sur $]0, 1[$, mais n'y atteint pas ses bornes. Le segment doit être fermé et borné.

E

Exemple 6 : image d'un segment

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3$ sur $[0, 3]$. Son minimum est $f(2) = -3$. Aux extrémités, $f(0) = 1$ et $f(3) = -2$, donc le maximum vaut 1. L'image de $[0, 3]$ est le segment $[-3, 1]$.

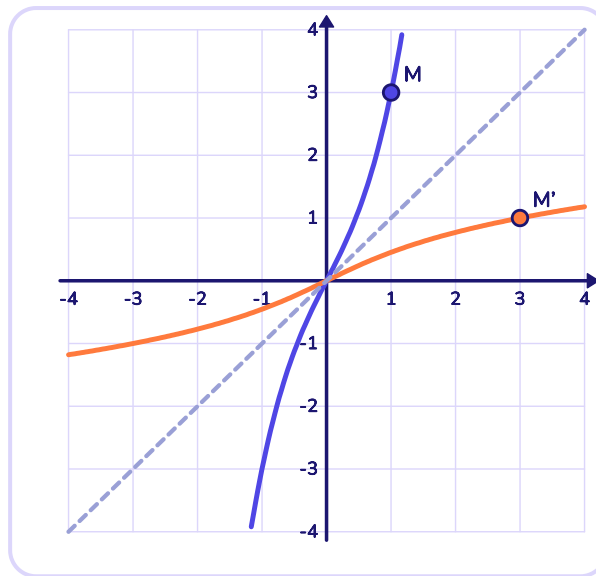
7. Théorème de la bijection

P

Théorème de la bijection

Soit f continue et **strictement monotone** sur un intervalle I . Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$, dont les extrémités sont les limites de f aux bornes de I . La bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue, strictement monotone, de même sens que f , et sa courbe est la symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Réciproquement, une fonction continue et **injective** sur un intervalle est strictement monotone : un « virage » donnerait deux antécédents d'une même valeur, ce que le TVI rend inévitable.



E Exemple 7 : une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$

La fonction $f(x) = x^3 + 2x$ est continue et strictement croissante (somme de deux fonctions strictement croissantes), de limites $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Comme $f(1) = 3$, on a $f^{-1}(3) = 1$: sur la figure, les points $M(1; 3)$ et $M'(3; 1)$ sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

I 8. Continuité uniforme

D Continuité uniforme

Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est **uniformément continue** sur D si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \in D^2, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Elle est **lipschitzienne** de rapport k si $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ pour tous x, y .

La différence avec la continuité tient à l'ordre des quantificateurs : ici δ ne dépend que de ε , alors que pour la simple continuité en a il dépend aussi du point a .

Notion	Quantificateurs	Le réel δ dépend de...
Continuité en a	$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x$	du point a et de ε
Continuité uniforme	$\forall \varepsilon \exists \delta \forall x, y$	de ε seulement
Lipschitz de rapport k	$\exists k \forall x, y$	on prend $\delta = \varepsilon/k$

P Implications et théorème de Heine

Lipschitzienne $\Rightarrow$ uniformément continue $\Rightarrow$ continue. Aucune réciproque n'est vraie en général, mais le **théorème de Heine** affirme que toute fonction continue sur un **segment** est uniformément continue.

M Réfuter la continuité uniforme

Chercher deux suites (x_n) et (y_n) de D telles que $x_n - y_n \rightarrow 0$ alors que $|f(x_n) - f(y_n)|$ reste supérieur à un réel $\varepsilon_0 > 0$.

E Exemple 8 : $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$

Posons $x_n = n$ et $y_n = n + \frac{1}{n}$. Alors $y_n - x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, mais $y_n^2 - x_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$. La fonction carré n'est donc pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, alors qu'elle l'est sur tout segment, d'après le théorème de Heine.

À retenir

- Une limite se définit par ε et δ ; elle est unique, et se teste par les suites.
- Formes indéterminées : factoriser, conjuguer, simplifier, ou utiliser des équivalents (jamais de somme d'équivalents).
- f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$; on prolonge par continuité quand la limite existe en un point exclu.
- **TVI** : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- **Bornes atteintes** : l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
- **Bijection** : continue et strictement monotone sur un intervalle donne une bijection continue, de réciproque continue.
- Lipschitz $\Rightarrow$ uniformément continue $\Rightarrow$ continue ; sur un segment, continue $\Rightarrow$ uniformément continue (Heine).

Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

  **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Limites et continuité : exercices de maths
Maths Sup

 Contrôles de maths

Limites et continuité : contrôle de maths
Maths Sup

 QCM de maths

Limites et continuité : QCM de maths
Maths Sup

 Exercices de maths

Dérivation et développements limités :
exercices de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Intégration et primitives : exercices de
maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Dérivation et développements limités :
contrôle de maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage