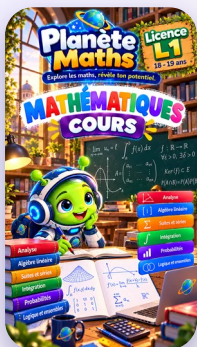


Limites et continuité : cours de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Une fonction « se comporte bien » lorsqu'on peut prévoir sa valeur en un point à partir de ce qui se passe autour de lui. Ce chapitre donne un sens rigoureux à cette idée : on précise la notion de limite avec des ε et des δ , on en déduit la continuité, puis on en tire des théorèmes puissants (valeurs intermédiaires, bornes atteintes, bijections) qui servent dans toute l'analyse.

1. Limite d'une fonction

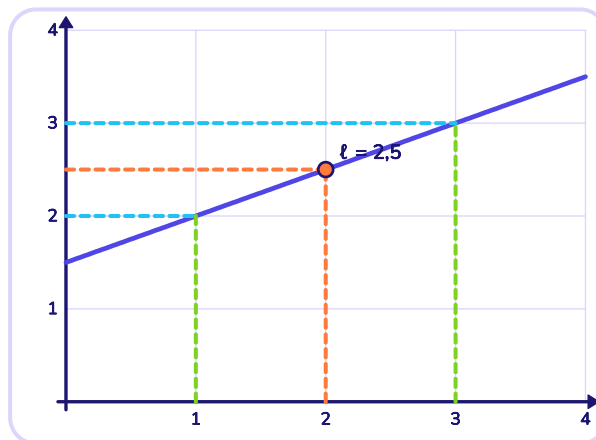
D Limite finie en un point

Soit f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$ et a un point de I ou une extrémité de I (la valeur en a éventuelle ne compte pas). On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I \setminus \{a\}, \quad |x - a| \leq \delta \implies |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On note $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Autrement dit, on peut rendre $f(x)$ aussi proche qu'on veut de ℓ à condition de prendre x suffisamment proche de a . La figure suivante montre la bande horizontale de demi-largeur ε et la bande verticale de demi-largeur δ qui lui correspond.



On adapte la définition aux limites en $+\infty$ (« pour tout ε , il existe A tel que $x \geq A$ entraîne $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$ ») et aux limites infinies (« pour tout M , il existe δ tel que $x \rightarrow a$ et $|x - a| \leq \delta$ entraînent $f(x) \geq M$ »). On parle de limite à gauche, notée $\lim_{x \rightarrow a^-} f$, ou à droite, notée $\lim_{x \rightarrow a^+} f$, lorsqu'on restreint x à $\setminus \{a\}$.

E**Exemple 1 : une limite par ε - δ**

Montrons que $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 1) = 5$. Pour tout x , $|(3x - 1) - 5| = 3|x - 2|$. Soit $\varepsilon > 0$; posons $\delta = \varepsilon/3$. Si $|x - 2| \leq \delta$, alors $|f(x) - 5| \leq 3\delta = \varepsilon$. La limite vaut bien 5.

P**Propriétés des limites**

- Unicité : si une limite existe, elle est unique.
- Opérations : si $f \rightarrow \ell$ et $g \rightarrow \ell'$ en a , alors $f + g \rightarrow \ell + \ell'$, $fg \rightarrow \ell\ell'$ et, si $\ell' \neq 0$, $f/g \rightarrow \ell/\ell'$.
- Encadrement : si $g \leq f \leq h$ au voisinage de a et si g et h tendent vers ℓ , alors $f \rightarrow \ell$.
- Caractérisation séquentielle : $f \rightarrow \ell$ en a si et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de $I \setminus \{a\}$ qui tend vers a , la suite $(f(u_n))$ tend vers ℓ .

!**Astuce de Zyro**

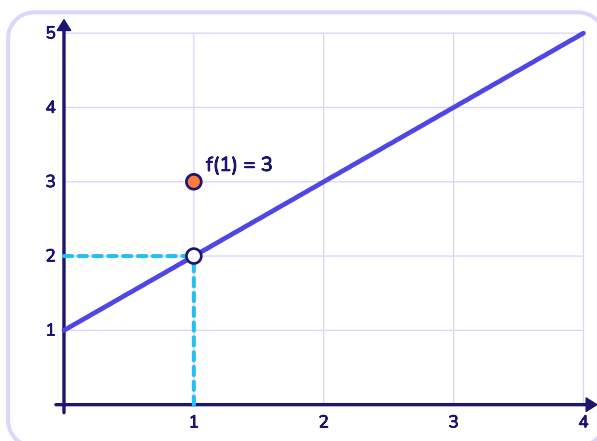
Pour prouver qu'une limite n'existe pas, trouve deux suites qui tendent toutes les deux vers a mais dont les images tendent vers des valeurs différentes : la caractérisation séquentielle fait le reste.

2. Continuité en un point

D Fonction continue

Soit f définie sur un intervalle I et $a \in I$. La fonction f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Elle est continue sur I si elle l'est en chaque point de I .

Les sommes, produits, quotients (de dénominateur non nul) et composées de fonctions continues sont continues. Les polynômes, **exp**, **sin**, **cos** sont continues sur $\mathbb{R}$. Une fonction peut avoir une limite en a sans être continue : il suffit que sa valeur en a soit « à part », comme ci-dessous.



E Exemple 2 : prolongement par continuité

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ pour $x \neq 2$. Pour $x \neq 2$, $f(x) = x + 2$, donc $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.

On pose $f(2) = 4$: la fonction ainsi prolongée est continue en 2. Toute autre valeur de $f(2)$ donnerait une fonction discontinue en 2.



Erreur classique

La partie entière E est continue à droite en tout entier n ($E(x) = n$ pour $x \in [n, n + 1[$) mais pas à gauche : $\lim_{x \rightarrow n^-} E(x) = n - 1 \neq E(n)$. Une fonction continue en a est continue à gauche et à droite ; la réciproque suppose que les deux limites soient égales à $f(a)$.

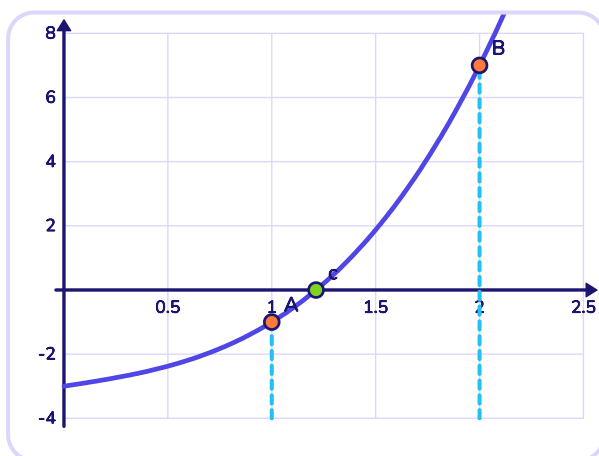
3. Théorème des valeurs intermédiaires



Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)

Soit f continue sur un intervalle I et $\forall a$

Idée de preuve : on pose $c = \sup\{x \in [a, b] : f(x) \leq y\}$ lorsque $f(a) \leq y \leq f(b)$ et on montre, par continuité, que $f(c) = y$. Le théorème a une conséquence essentielle : **l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.**



M**Méthode : localiser une racine**

1. Vérifier que f est continue sur $[a, b]$.
2. Calculer $f(a)$ et $f(b)$ et constater qu'ils sont de signes contraires.
3. Conclure à l'existence d'une racine ; pour l'unicité, montrer que f est strictement monotone.
4. Resserrer par dichotomie : on coupe l'intervalle en deux et on garde la moitié où le signe change.

E**Exemple 3 : une racine par dichotomie**

Soit $f(x) = x^3 + x - 3$. Elle est continue, $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 7 > 0$: il existe $c \in]1, 2[$ avec $f(c) = 0$. Comme f est strictement croissante (somme de deux fonctions strictement croissantes), c est unique. Ensuite $f(1,2) = -0,072 < 0$ et $f(1,25) \approx 0,203 > 0$, donc $\{1\}$

4. Image d'un segment**P****Théorème des bornes atteintes**

Si f est continue sur un segment $[a, b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes : il existe $m, M \in [a, b]$ tels que $f(m) = \min f$ et $f(M) = \max f$. Avec le TVI, on obtient $f([a, b]) = [\min f, \max f]$: l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Les hypothèses sont indispensables : $x \mapsto 1/x$ est continue sur $]0, 1]$ mais n'est pas bornée ; $x \mapsto x$ sur $]0, 1[$ n'atteint ni son minimum ni son maximum. Dans les deux cas l'ensemble de départ n'est pas un segment.

5. Fonctions monotones

P Limites d'une fonction monotone

Soit f croissante sur $]a, b[$. Alors f admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point c de $]a, b[$, et $f(c^-) \leq f(c) \leq f(c^+)$. En b , f a une limite finie si elle est majorée, $+\infty$ sinon.

Une fonction monotone n'a donc que des discontinuités « par saut ». Et même : si f est monotone sur un intervalle I , elle est continue si et seulement si $f(I)$ est un intervalle. Enfin, **une fonction continue et injective sur un intervalle est strictement monotone**.

6. Continuité uniforme

D Continuité uniforme

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue sur I si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in I, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Ici δ ne dépend que de ε , et non du point considéré.

Toute fonction k -lipschitzienne ($|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$) est uniformément continue (prendre $\delta = \varepsilon/k$), et toute fonction uniformément continue est continue. Le théorème de Heine affirme : **toute fonction continue sur un segment est uniformément continue**.

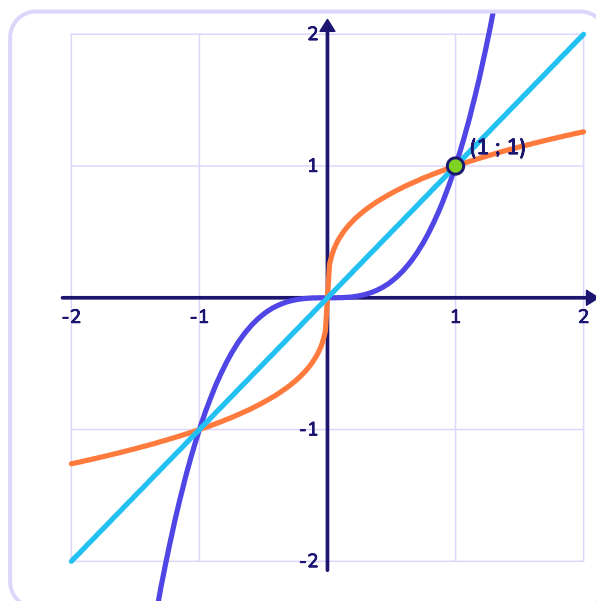
E**Exemple 4 : une fonction qui ne l'est pas**

Sur $]0, 1]$, $f(x) = 1/x$ est continue. Posons $x_n = 1/n$ et $y_n = 1/(n+1)$: alors $|x_n - y_n| = \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow 0$ mais $|f(x_n) - f(y_n)| = 1$. Avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, aucun δ ne convient : f n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$.

7. Fonctions réciproques**P****Théorème de la bijection**

Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I . Alors f réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I)$, et la bijection réciproque $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue, strictement monotone, de même sens de variation que f .

Dans un repère orthonormé, les courbes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



E**Exemple 5 : calculer une réciproque**

La fonction $f(x) = x^2 + 2x$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, de limite $+\infty$ en $+\infty$, avec $f(0) = 0$: c'est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Réolvons $y = x^2 + 2x : (x + 1)^2 = 1 + y$, donc $x = -1 + \sqrt{1 + y}$ car $x \geq 0$.

Ainsi $f^{-1}(y) = \sqrt{1 + y} - 1$; par exemple $f^{-1}(8) = 2$, ce qui est cohérent avec $f(2) = 8$.

À retenir

- $\lim_{x \rightarrow a} f = \ell$ signifie : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$; la limite est unique et se teste avec des suites.
- f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- TVI : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle ; un changement de signe donne une racine.
- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment, et f y est bornée en atteignant ses bornes.
- Une fonction monotone a des limites à gauche et à droite ; continue et injective sur un intervalle, elle est strictement monotone.
- Lipschitzienne $\Rightarrow$ uniformément continue $\Rightarrow$ continue ; sur un segment, continue $\Rightarrow$ uniformément continue.
- Continue et strictement monotone : bijection dont la réciproque est continue, de même monotonie.

Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Limites et continuité : exercices de maths
Licence L1

Contrôles de maths

Limites et continuité : contrôle de maths
Licence L1

QCM de maths

Limites et continuité : QCM de maths
Licence L1

Exercices de maths

Dérivation et formules de Taylor :
exercices de maths Licence L1

 Exercices de maths

Intégration et primitives : exercices de maths Licence L1

 Contrôles de maths

Dérivation et formules de Taylor : contrôle de maths Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage