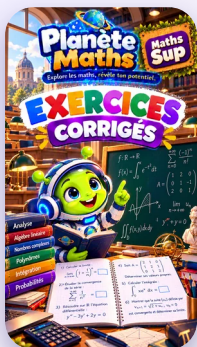


# Limites et continuité : exercices corrigés de maths Maths Sup à télécharger en PDF



## Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

### 1 Limites de fractions rationnelles



a) On factorise  $x^3$  :  $\frac{4x^3 - x}{2x^3 + 5} = \frac{4 - 1/x^2}{2 + 5/x^3} \rightarrow \frac{4}{2} = 2.$

b) Pour  $x \neq 3$ ,  $\frac{x^2 - 9}{x - 3} = x + 3$ , qui tend vers 6.

c) On factorise  $x^2$  :  $\frac{7 + 1/x}{1 - 1/x^2} \rightarrow 7.$

## 2 Limite à gauche, limite à droite



Pour  $x > 2$ ,  $|x - 2| = x - 2$  donc  $f(x) = 1$  : la limite à droite vaut 1.

Pour  $x < 2$ ,  $|x - 2| = -(x - 2)$  donc  $f(x) = -1$  : la limite à gauche vaut  $-1$ .

Les deux limites sont différentes :  $f$  n'a pas de limite en 2.

## 3 Raccorder deux morceaux



$f(1) = 2$  et la limite à gauche vaut aussi 2. La limite à droite vaut  $a + 3$ .

La continuité en 1 équivaut à  $a + 3 = 2$ , soit  $a = -1$ .

## 4 Vrai ou faux ?



- a. Vrai : par définition, la limite en  $a$  vaut  $f(a)$ .
- b. Faux :  $f(x) = 1$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 0$  a pour limite 1 en 0, mais  $f(0) = 0$ .
- c. Vrai : c'est le TVI avec la valeur 0, comprise entre  $f(0)$  et  $f(1)$  ; le point trouvé est dans  $]0, 1[$  car  $f(0)$  et  $f(1)$  ne sont pas nuls.
- d. Faux : la fonction n'est pas majorée sur  $]0, 1]$  (elle tend vers  $+\infty$  en 0) ;  $]0, 1]$  n'est pas un segment.

## 5 Trois solutions



Soit  $f(x) = x^3 - 4x + 1$ , continue sur  $\mathbb{R}$ . On calcule  $f(-3) = -14$ ,  $f(-2) = 1$ ,  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = -2$  et  $f(2) = 1$ .

Les signes sont contraires aux extrémités de chacun des trois intervalles : le TVI donne une solution dans chacun. Ces intervalles sont disjoints, donc on a trois solutions distinctes. Un polynôme de degré 3 a au plus trois racines : l'équation a exactement trois solutions.

## 6 Équivalents simples



a)  $3x^4$  (terme de plus haut degré). b)  $5x$  ( $\sin u \sim u$  avec  $u = 5x \rightarrow 0$ ). c)  $\frac{x^2}{2}$ . d)  $4x$  ( $\ln(1+u) \sim u$  avec  $u = 4x \rightarrow 0$ ).

Par quotient,  $\frac{\sin(5x)}{\ln(1+4x)} \sim \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}$  : la limite vaut  $\frac{5}{4}$ .

## 7 Une fonction à sauts



Pour  $x \in [3, 4[$ ,  $\lfloor x \rfloor = 3$  et  $g(x) = 3x$  : la limite à droite en  $3$  vaut  $9 = g(3)$ , donc  $g$  est continue à droite en  $3$ .

Pour  $x \in [2, 3[$ ,  $g(x) = 2x$  : la limite à gauche en  $3$  vaut  $6 \neq g(3)$ . Donc  $g$  n'est pas continue à gauche en  $3$ , ni continue en  $3$  : on lit un saut de  $6$  à  $9$  sur le graphe.

## 8 Une racine carrée conjuguée



Pour  $x > 0$ , on multiplie par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2 + 4x} - x = \frac{(x^2 + 4x) - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x} + x} = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 4x} + x} = \frac{4}{\sqrt{1 + 4/x} + 1}.$$

Quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $\sqrt{1 + 4/x} \rightarrow 1$ , donc la limite vaut  $\frac{4}{2} = 2$ .

## 9 Encadrement



Pour tout  $x$ ,  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , donc pour  $x > 1$  (dénominateur positif) :

$$\frac{3x-1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{3x+1}{x-1}.$$

Les deux bornes valent  $\frac{3 \mp 1/x}{1 - 1/x}$  et tendent vers  $3$ . Par le théorème des gendarmes,

$\lim_{+\infty} f = 3$ .

## 10 Prolonger par continuité



Pour  $x \neq 0$ ,  $\sqrt{x+9} - 3 = \frac{(x+9) - 9}{\sqrt{x+9} + 3} = \frac{x}{\sqrt{x+9} + 3}$ , donc  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+9} + 3}$ .

Cette expression tend vers  $\frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$  en 0. Le prolongement par continuité est obtenu en posant  $f(0) = \frac{1}{6}$ .

## 11 Limites et équivalents



a)  $e^{2x} - 1 \sim 2x$  et  $\ln(1 + 3x) \sim 3x$  : le quotient tend vers  $\frac{2}{3}$ .

b)  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$  et  $x \sin x \sim x^2$  : le quotient tend vers  $\frac{1}{2}$ .

c)  $\tan(3x) \sim 3x$  et  $\sin x \sim x$  : le quotient tend vers 3.

## 12 Un point fixe du cosinus



Soit  $g(x) = \cos x - x$ , continue sur  $[0, 1]$ . On a  $g(0) = 1 > 0$  et  $g(1) = \cos 1 - 1 < 0$  (car  $\cos 1 \approx 0,54$ ) : par le TVI,  $g$  s'annule.

Sur  $[0, 1]$ ,  $\cos$  est décroissante et  $x \mapsto -x$  aussi :  $g$  est strictement décroissante, donc la solution est unique.

Enfin  $g(0,7) \approx 0,065 > 0$  et  $g(0,8) \approx -0,103 < 0$  : la solution est dans  $]0,7; 0,8[$ .

### 13 Une bijection et sa réciproque



$f$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  (somme de deux fonctions strictement croissantes), de limites  $-\infty$  et  $+\infty$  : c'est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$  d'après le théorème de la bijection.

On lit  $f(1) = 3$ ,  $f(2) = 8 + 4 = 12$  et  $f(-1) = -3$ , donc  $f^{-1}(3) = 1$ ,  $f^{-1}(12) = 2$  et  $f^{-1}(-3) = -1$ .

Si  $M(a; b)$  est sur la courbe de  $f$ , alors  $f(a) = b$ , donc  $f^{-1}(b) = a$  et  $M'(b; a)$  est sur celle de  $f^{-1}$  : les courbes sont symétriques par rapport à la droite  $y = x$ .

### 14 Image d'un segment



La dérivée est  $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$  :  $f$  croît sur  $[0, 1]$  et décroît sur  $[1, 3]$ . On a  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = \frac{1}{2}$  et  $f(3) = \frac{3}{10}$ .

Le maximum vaut  $\frac{1}{2}$  et le minimum 0 (en 0) : l'image de  $[0, 3]$  est  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

Sur  $[1, +\infty[$ ,  $f$  décroît de  $\frac{1}{2}$  vers 0 sans l'atteindre, et  $f(0) = 0$  : l'image de  $[0, +\infty[$  est encore  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ . La fonction est impaire, donc l'image de  $\mathbb{R}$  est  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ .

### 15 Deux points à même température



Posons  $g(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$  pour  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  ;  $g$  est continue.

On a  $g(0) = f(\frac{1}{2}) - f(0)$  et  $g(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2}) = f(0) - f(\frac{1}{2}) = -g(0)$ .

Les deux valeurs sont opposées, donc 0 est compris entre elles : par le TVI, il existe  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  avec  $g(x) = 0$ , c'est-à-dire  $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$ .

## 16 Périodique et limite finie



- a. Fixons  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout entier  $n$ ,  $f(x + nT) = f(x)$  et  $x + nT \rightarrow +\infty$ . Par composition avec la suite,  $f(x + nT) \rightarrow \ell$ . Une suite constante a pour limite sa valeur :  $f(x) = \ell$ , pour tout  $x$ .
- b.  $\cos$  est continue,  $2\pi$ -périodique et non constante ( $\cos 0 = 1$ ,  $\cos \pi = -1$ ). Si elle avait une limite finie en  $+\infty$ , elle serait constante, ce qui est faux ; elle ne peut pas non plus tendre vers  $\pm\infty$  (elle est bornée).
- c. Soit  $\ell$  la limite. Il existe  $B$  tel que  $|h(x) - \ell| \leq 1$  pour  $x \geq B$ , donc  $|h| \leq |\ell| + 1$  sur  $[B, +\infty[$ . Sur le segment  $[0, B]$ ,  $h$  est bornée (théorème des bornes atteintes). Donc  $h$  est bornée sur  $[0, +\infty[$ .

## 17 Racine carrée et carré



- a. On a  $(\sqrt{y} + \sqrt{x-y})^2 = x + 2\sqrt{y}\sqrt{x-y} \geq x$ , donc  $\sqrt{x} \leq \sqrt{y} + \sqrt{x-y}$ , d'où l'inégalité. Pour  $\varepsilon > 0$ , on prend  $\delta = \varepsilon^2$  : si  $|x - y| \leq \delta$ , alors  $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} \leq \varepsilon$ .
- b. Pour  $x, y \in [0, 3]$ ,  $|x^2 - y^2| = |x - y| |x + y| \leq 6 |x - y|$ .
- c. Avec  $x_n = n$  et  $y_n = n + \frac{1}{n}$ ,  $y_n - x_n \rightarrow 0$  mais  $y_n^2 - x_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$  : aucun  $\delta$  ne convient pour  $\varepsilon = 1$ .

## 18 L'inverse n'est pas uniforme



- a. La fonction inverse est continue sur  $]0, 1]$  comme quotient de fonctions continues. Mais  $x_n - y_n = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$ , alors que  $\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \right| = |n - 2n| = n \geq 1$  : la continuité n'est pas uniforme.
- b. Pour  $x, y \in [\frac{1}{2}, 1]$ ,  $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x - y|}{xy} \leq 4 |x - y|$  car  $xy \geq \frac{1}{4}$ . La fonction est 4-lipschitzienne ; ce résultat est cohérent avec le théorème de Heine sur ce segment.

## 19 Limites exponentielles



a) On écrit  $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x} = \exp\left(3x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right)$ . Comme  $\frac{2}{x} \rightarrow 0$ ,  $\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \sim \frac{2}{x}$ , donc  $3x \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \rightarrow 6$  et la limite vaut  $e^6$ .

b) De même,  $x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \sim x \times \left(-\frac{1}{x}\right) = -1$  : la limite vaut  $e^{-1}$ .

c)  $x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/x^2} + 1} \rightarrow \frac{1}{2}$ .

## 20 Les racines de $x^3 - 3x + 1$



a.  $f'(x) = 3(x^2 - 1)$  :  $f$  croît sur  $] -\infty, -1]$ , décroît sur  $[-1, 1]$ , croît sur  $[1, +\infty[$ , avec  $f(-1) = 3$  et  $f(1) = -1$ . Sur  $] -\infty, -1]$ ,  $f$  est une bijection sur  $] -\infty, 3]$  qui contient  $0$  : une solution. Sur  $[-1, 1]$ , bijection sur  $[-1, 3]$  : une solution. Sur  $[1, +\infty[$ , bijection sur  $[-1, +\infty[$  : une solution. Trois solutions exactement.

Localisation :  $f(-2) = -1 < 0 < f(-1) = 3$  donne  $\alpha \in ] -2, -1[$  ;

$f(0) = 1 > 0 > f(1) = -1$  donne  $\beta \in ]0, 1[$  ;  $f(1) = -1 < 0 < f(2) = 3$  donne  $\gamma \in ]1, 2[$ .

b. Avec  $x = 2 \cos \theta$ ,  $x^3 - 3x = 8 \cos^3 \theta - 6 \cos \theta = 2 \cos 3\theta$ , donc  $f(x) = 0$  équivaut à  $\cos 3\theta = -\frac{1}{2}$ , soit  $3\theta \in \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right\}$  et  $\theta \in \left\{\frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}\right\}$ . On obtient  $\alpha = 2 \cos \frac{8\pi}{9} \approx -1,88$ ,  $\beta = 2 \cos \frac{4\pi}{9} \approx 0,35$  et  $\gamma = 2 \cos \frac{2\pi}{9} \approx 1,53$ .

## 21 Continue et injective



- a. Le réel  $y$  est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , donc le TVI sur  $[a, b]$  donne  $s \in [a, b]$  avec  $f(s) = y$  ;  $s \neq b$  car  $f(b) > y$ , donc  $s < b$ . De même sur  $[b, c]$ , on obtient  $t > b$  avec  $f(t) = y$ . Ainsi  $s < b < t$  et  $f(s) = f(t) = y$ .
- b. Deux antécédents distincts d'une même valeur contredisent l'injectivité : si  $f$  est continue et injective, on ne peut avoir  $f(b) > \max(f(a), f(c))$  (et de même avec un creux). C'est la première étape de la preuve qu'une telle fonction est strictement monotone.
- c.  $f(-1) = -1 + 3 = 2$  et  $f(2) = 8 - 6 = 2$ , avec  $-1 \neq 2$  :  $f$  n'est pas injective sur  $[-2, 2]$ , ce qui est cohérent avec les variations vues à l'exercice précédent.

### Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

 QCM de maths

Limites et continuité : exercices de maths  
Maths Sup

Limites et continuité : QCM de maths  
Maths Sup



**Contrôles de maths**

Limites et continuité : contrôle de maths  
Maths Sup



**Exercices de maths**

Dérivation et développements limités :  
exercices de maths Maths Sup



**Exercices de maths**

Intégration et primitives : exercices de  
maths Maths Sup



**QCM de maths**

Dérivation et développements limités :  
QCM de maths Maths Sup

**Zyro vous emmène sur nos sites partenaires**

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage