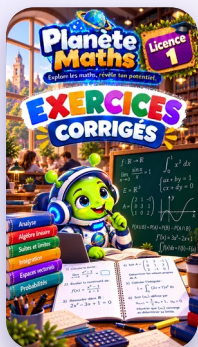


Limites et continuité : exercices corrigés de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Une limite par ε - δ



Pour tout x , $|f(x) - 17| = |5x - 15| = 5|x - 3|$.

Soit $\varepsilon > 0$; en posant $\delta = \varepsilon/5$, $|x - 3| \leq \delta$ entraîne $|f(x) - 17| \leq 5\delta = \varepsilon$. La limite vaut donc 17.

Pour $\varepsilon = 0,01$, on prend $\delta = 0,01/5 = 0,002$.

2 Limite d'un polynôme



Un polynôme est continu sur $\mathbb{R}$, donc la limite est la valeur en -1 :

$$(-1)^2 + 3 \times (-1) - 2 = 1 - 3 - 2 = -4.$$

La limite vaut -4 .

3 Limite en l'infini d'un quotient



On factorise par x^2 : $\frac{4x^2 - x + 1}{2x^2 + 5} = \frac{4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{5}{x^2}}$.

Le numérateur tend vers 4, le dénominateur vers 2 : la limite vaut $\frac{4}{2} = 2$.

4 Limite à gauche et à droite



Si $x \rightarrow 4^-$, $x - 4$ est négatif et tend vers 0 : $f(x) \rightarrow -\infty$.

Si $x \rightarrow 4^+$, $x - 4$ est positif et tend vers 0 : $f(x) \rightarrow +\infty$.

Les deux limites sont différentes : f n'a pas de limite en 4.

5 Partie entière en 3



Pour $x \in [3, 4[$, $E(x) = 3$: la limite à droite est $3 = E(3)$, donc E est continue à droite en 3.

Pour $x \in [2, 3[$, $E(x) = 2$: la limite à gauche est $2 \neq E(3) = 3$.

E n'est donc pas continue à gauche, ni continue, en 3.

6 Prolonger par continuité



Pour $x \neq 3$, $f(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$, donc $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$.

La continuité en 3 impose $k = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, c'est-à-dire $k = 6$.

7 Une racine carrée par le TVI



Posons $g(x) = x^2 - 7$, continue sur $[2, 3]$. On a $g(2) = -3 < 0$ et $g(3) = 2 > 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]2, 3[$ tel que $g(c) = 0$, donc $c^2 = 7$ (on retrouve $c = \sqrt{7} \approx 2,646$).

8 Une limite trigonométrique



Pour $x \neq 0$, $\frac{\sin(3x)}{x} = 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x}$.

Avec $u = 3x \rightarrow 0$, $\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1$. Par composition et produit, la limite vaut $3 \times 1 = 3$.

9 Le théorème d'encadrement



Pour tout $x \neq 0$, $-1 \leq \cos(1/x) \leq 1$, donc $-x^2 \leq x^2 \cos(1/x) \leq x^2$.

Les deux bornes tendent vers 0 en 0 : par encadrement, la limite de $x^2 \cos(1/x)$ est 0.

10 Pas de limite pour $\sin(1/x)$



Posons $x_n = \frac{1}{n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{\pi/2 + 2n\pi}$. Ces deux suites tendent vers 0.

On a $f(x_n) = \sin(n\pi) = 0$ pour tout n , donc $f(x_n) \rightarrow 0$, et $f(y_n) = \sin(\pi/2 + 2n\pi) = 1$, donc $f(y_n) \rightarrow 1$.

Les limites sont différentes : par la caractérisation séquentielle, f n'a pas de limite en 0.

11 Cosinus égal à x



Posons $g(x) = \cos x - x$, continue sur $[0, 1]$. On a $g(0) = 1 > 0$ et $g(1) = \cos 1 - 1 \approx -0,46 < 0$: par le TVI, il existe une solution.

De plus g est strictement décroissante sur $[0, 1]$ (somme de $\cos$, décroissante sur $[0, \pi]$, et de $-x$) : la solution est unique.

Comme $g(0,7) \approx 0,065 > 0$ et $g(0,8) \approx -0,103 < 0$, la solution est dans $]0,7; 0,8[$; elle vaut environ **0,739**.

12 Image d'un segment



f est continue sur le segment $[-2, 2]$: son image est un segment $[m, M]$.

La dérivée $f'(x) = 3x^2 - 3$ s'annule en ± 1 . Les valeurs aux points remarquables sont $f(-2) = -2$, $f(-1) = 2$, $f(1) = -2$, $f(2) = 2$.

Le minimum est -2 et le maximum est 2 : $f([-2, 2]) = [-2, 2]$.

13 Une bijection et sa réciproque



f est continue et strictement croissante (produit $x(x+2)$ de deux fonctions positives strictement croissantes), $f(0) = 0$ et $f(x) \rightarrow +\infty$: c'est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

De $y = x^2 + 2x$ on tire $(x+1)^2 = 1+y$, donc $x = \sqrt{1+y} - 1$ car $x \geq 0$. Ainsi $f^{-1}(y) = \sqrt{1+y} - 1$.

$f^{-1}(15) = \sqrt{16} - 1 = 3$, cohérent avec $f(3) = 9 + 6 = 15$.

14 Limite d'une fonction monotone



On écrit $f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2}$. Comme $1+x^2$ croît sur $[0, +\infty[$, $\frac{1}{1+x^2}$ décroît, et f est croissante.

De plus $f(x) < 1$: f est majorée. Une fonction croissante majorée a une limite finie en $+\infty$.

Ici $\frac{1}{1+x^2} \rightarrow 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ (par exemple $f(3) = 0,9$).

15 Un point fixe



Posons $g(x) = f(x) - x$, continue sur $[0, 1]$.

$g(0) = f(0) \geq 0$ car $f(0) \in [0, 1]$, et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(1) \leq 1$.

Si $g(0) = 0$ ou $g(1) = 0$, on a un point fixe. Sinon $g(0) > 0 > g(1)$ et le TVI donne $c \in]0, 1[$ avec $g(c) = 0$, soit $f(c) = c$.

16 Racine carrée uniformément continue



Supposons $x \geq y \geq 0$. Alors $0 \leq \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$, donc

$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$, d'où $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x - y}$.

Par symétrie, $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ pour tous $x, y \geq 0$.

Soit $\varepsilon > 0$; avec $\delta = \varepsilon^2$, $|x - y| \leq \delta$ entraîne $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \varepsilon$. La fonction est uniformément continue.

17 Le carré n'est pas uniformément continu



Posons $x_n = n$ et $y_n = n + \frac{1}{n}$. Alors $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Mais $y_n^2 - x_n^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \geq 2$.

Pour $\varepsilon = 1$, aucun $\delta > 0$ ne convient : dès que $\frac{1}{n} \leq \delta$, on a $|y_n^2 - x_n^2| \geq 2 > 1$. La fonction n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

18 Les fonctions additives continues



Avec $x = y = 0$, $f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$. Avec $y = -x$, $f(-x) = -f(x)$.

Par récurrence, $f(n) = nf(1) = na$ pour $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{Z}$ par imparité.

Pour $r = p/q$ rationnel, $qf(p/q) = f(p) = pa$, donc $f(r) = ar$.

Soit x réel ; il existe des rationnels $r_n \rightarrow x$. Par continuité,

$$f(x) = \lim f(r_n) = \lim ar_n = ax.$$

19 Une fonction définie avec la partie entière



Sur $]n, n+1[$, $E(x) = n$ et $f(x) = n + (x - n)^2$ est un polynôme : f est continue.

En un entier n : à droite $f(x) = n + (x - n)^2 \rightarrow n = f(n)$; à gauche, $E(x) = n - 1$ et $f(x) = n - 1 + (x - n + 1)^2 \rightarrow n - 1 + 1 = n = f(n)$.

Les limites à gauche et à droite valent $f(n)$: f est continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(2,5) = 2 + 0,5^2 = 2,25 \text{ et } f(-0,5) = -1 + 0,5^2 = -0,75.$$

20 Réciproque de $x^3 + x$



f est continue et strictement croissante (somme de deux fonctions strictement croissantes).

Ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ valent $-\infty$ et $+\infty$: par le TVI, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Le théorème de la bijection montre que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est continue, strictement croissante.

$$\text{On a } f(1) = 2 \text{ donc } f^{-1}(2) = 1, \text{ et } f(2) = 8 + 2 = 10 \text{ donc } f^{-1}(10) = 2.$$

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 123 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Limites et continuité : exercices de maths
Licence L1

QCM de maths

Limites et continuité : QCM de maths
Licence L1

Contrôles de maths

Limites et continuité : contrôle de maths
Licence L1

Exercices de maths

Dérivation et formules de Taylor :
exercices de maths Licence L1

 Exercices de maths

Intégration et primitives : exercices de maths Licence L1

 QCM de maths

Dérivation et formules de Taylor : QCM de maths Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage