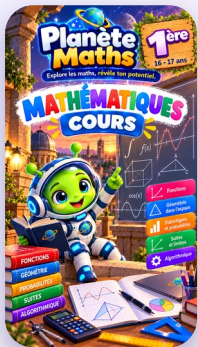


Calcul intégral : cours de maths Terminale à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Combien d'eau a coulé dans un réservoir pendant une heure ? Quelle distance un coureur a-t-il parcourue connaissant sa vitesse à chaque instant ? Quelle est l'aire d'un terrain délimité par une courbe ? Toutes ces questions se règlent avec un même outil, l'**intégrale**. Tu vas voir qu'elle mesure une aire, qu'elle se calcule avec des **primitives**, et qu'elle obéit à des règles simples qui rendent les calculs très efficaces.

1. Intégrale et aire sous une courbe

Le plan est muni d'un repère orthogonal. On choisit une unité d'aire (u.a.) : c'est l'aire du rectangle construit sur les unités des deux axes.

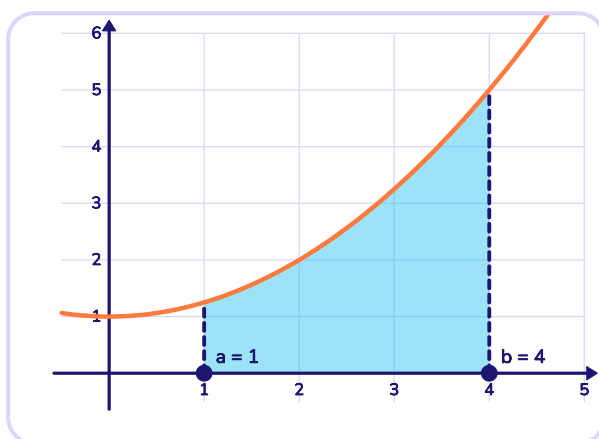
D

Intégrale d'une fonction continue et positive

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$, avec $a \leq b$. L'intégrale de f entre a et b , notée

$$\int_a^b f(x) \, dx,$$

est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



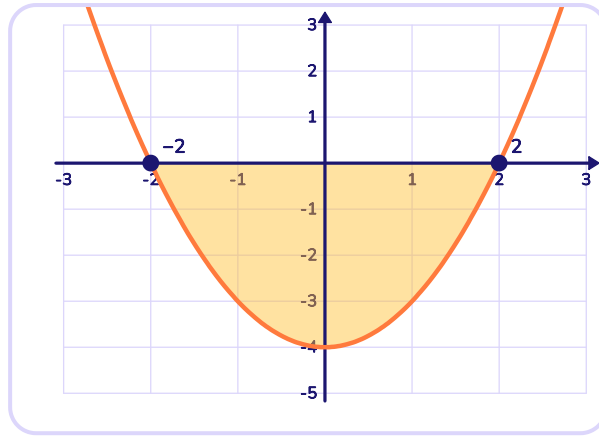
Sur la figure, le domaine coloré est celui qui se trouve sous la courbe de $f(x) = \frac{x^2}{4} + 1$ entre $a = 1$ et $b = 4$. La variable x est « muette » : on peut écrire $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt$ sans rien changer.

E

Exemple 1 : lecture géométrique

Pour $f(x) = x$ sur $[0; 4]$, le domaine est un triangle rectangle de base 4 et de hauteur 4. Donc $\int_0^4 x \, dx = \frac{4 \times 4}{2} = 8$ u.a.

Si f est de signe quelconque, l'intégrale se définit encore, mais elle compte **négativement** les parties situées sous l'axe des abscisses. Et on pose $\int_a^a f(x) \, dx = 0$ ainsi que $\int_b^a f(x) \, dx = -\int_a^b f(x) \, dx$.



Intégrale n'est pas toujours aire

Quand f est négative sur $[a; b]$, l'intégrale est un nombre **négatif**, alors qu'une aire est toujours positive. L'aire du domaine vaut alors $-\int_a^b f(x) dx$, comme pour la zone ci-dessus.

2. Lien avec les primitives



Théorème fondamental

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I . Pour tous a et b de I :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_a^b.$$

De plus, pour a fixé, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .

Le résultat ne dépend pas de la primitive choisie : si on remplace F par $F + k$, la constante k disparaît dans la différence $F(b) - F(a)$. On prend donc la primitive la plus simple.

M**Méthode : calculer une intégrale**

1. Repère une primitive F de f avec les formules usuelles (sans constante).
2. Écris $\left[F(x)\right]_a^b$.
3. Calcule $F(b) - F(a)$ avec soin, surtout avec des signes moins.

E**Exemple 2**

$$\int_1^3 (2x + 1) \, dx = \left[x^2 + x\right]_1^3 = (9 + 3) - (1 + 1) = 10.$$

Avec une exponentielle : $\int_0^1 e^{2x} \, dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2}.$

Fonction f	Une primitive F
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x} \ (x > 0)$	$\ln x$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$u'e^u$	e^u
$\frac{u'}{u} \ (u > 0)$	$\ln u$

3. Linéarité et relation de Chasles

P Linéarité

Si f et g sont continues sur $[a; b]$ et k est un réel :

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

P**Relation de Chasles**

Si f est continue sur un intervalle I et si a, b, c sont dans I :

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx.$$

E**Exemple 3**

$$\int_0^2 (3x^2 - 4x + 1) \, dx = \left[x^3 - 2x^2 + x \right]_0^2 = (8 - 8 + 2) - 0 = 2.$$

Si $\int_0^2 f = 5$ et $\int_2^5 f = -1$, alors $\int_0^5 f = 5 + (-1) = 4$ par la relation de Chasles, et $\int_5^2 f = 1$.

4. Positivité et encadrement

P**Positivité et croissance**

Soient f et g continues sur $[a; b]$ avec $a \leq b$.

- Si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \geq 0$.
- Si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx$.
- Si $m \leq f \leq M$ sur $[a; b]$, alors $m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a)$.

Le dernier point est géométrique : le domaine sous la courbe contient un rectangle de hauteur m et est contenu dans un rectangle de hauteur M . Il sert à **encadrer une intégrale qu'on ne sait pas calculer**.

E**Exemple 4**

Pour $x \in [0; 1]$, on a $0 \leq x^2 \leq 1$, donc $e^{-1} \leq e^{-x^2} \leq 1$. En intégrant sur $[0; 1]$ (longueur 1) : $e^{-1} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq 1$.

**Sens des bornes**

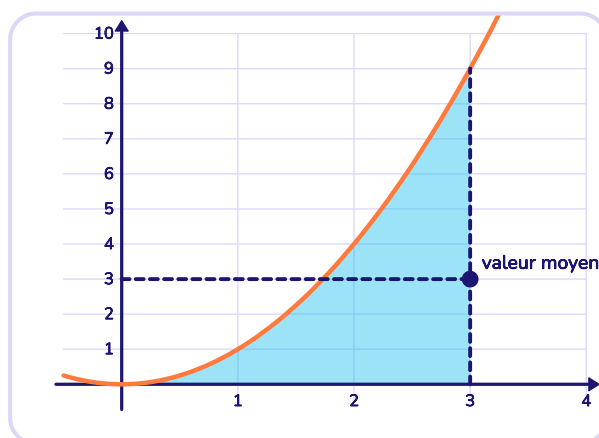
Les inégalités entre intégrales exigent $a \leq b$. Si les bornes sont dans l'autre sens, le sens de l'inégalité s'inverse.

5. Valeur moyenne

D**Valeur moyenne**

Si f est continue sur $[a; b]$ avec $a < b$, sa **valeur moyenne** sur $[a; b]$ est

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$



Géométriquement, μ est la hauteur du rectangle de base $[a; b]$ qui a **la même aire** que le domaine sous la courbe. On a toujours $m \leq \mu \leq M$ si $m \leq f \leq M$.

E**Exemple 5**

Valeur moyenne de $f(x) = x^2$ sur $[0; 3]$: $\mu = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{1}{3} \times 9 = 3$. C'est la droite $y = 3$ tracée sur la figure.

6. Intégration par parties**P****Formule d'intégration par parties**

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a; b]$ dont les dérivées u' et v' sont continues. Alors

$$\int_a^b u'(x) v(x) dx = \left[u(x) v(x) \right]_a^b - \int_a^b u(x) v'(x) dx.$$

Elle vient de la dérivée d'un produit : $(uv)' = u'v + uv'$, qu'on intègre entre a et b .

M**Méthode**

1. Repère dans l'intégrale un produit où l'un des facteurs se simplifie en le dérivant (souvent x ou $\ln x$) et l'autre a une primitive facile.
2. Nomme u' (celui qu'on intègre) et v (celui qu'on dérive).
3. Calcule u et v' , applique la formule, puis termine le calcul.

E**Exemple 6**

$I = \int_0^1 x e^x dx$. On pose $u'(x) = e^x$, $v(x) = x$, donc $u(x) = e^x$, $v'(x) = 1$.

$$I = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1.$$

Pour $\int_1^e \ln x dx$, on écrit $\ln x = 1 \times \ln x$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln x$:

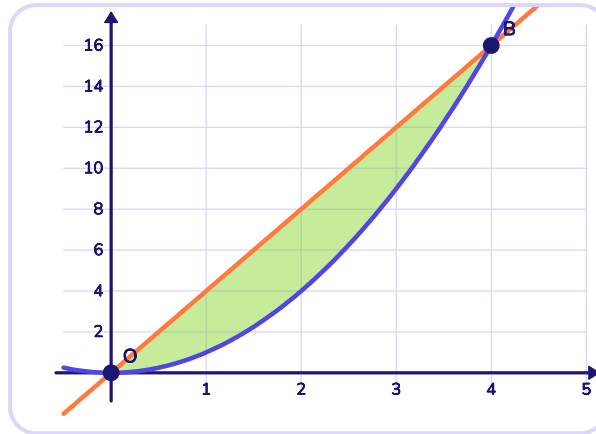
$$\left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e 1 dx = e - (e - 1) = 1.$$
!**Astuce de Zyro**

Sur ma planète, on dit « on dérive le polynôme, on intègre l'exponentielle ». Si le logarithme est dans le produit, c'est lui qu'on dérive, car sa dérivée $\frac{1}{x}$ est plus simple que lui !

7. Aire entre deux courbes**P****Aire entre deux courbes**

Si f et g sont continues sur $[a; b]$ et si $f \geq g$ sur cet intervalle, l'aire du domaine compris entre les courbes de f et g et les droites $x = a$ et $x = b$ est

$$\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \text{ u.a.}$$



E Exemple 7

Soit $f(x) = 4x$ et $g(x) = x^2$. Elles se coupent quand $4x = x^2$, soit $x = 0$ ou $x = 4$.
 Sur $[0 ; 4]$, $4x - x^2 = x(4 - x) \geq 0$, donc $f \geq g$.

$$\mathcal{A} = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} \text{ u.a.}$$

Pour passer en unités usuelles, on multiplie par l'aire d'une unité : si l'unité d'aire vaut **2 cm × 3 cm**, alors **1 u.a. = 6 cm²**. Si les courbes se croisent à l'intérieur de l'intervalle, on **découpe** avec Chasles aux points d'intersection et on intègre à chaque fois « la plus haute moins la plus basse ».

À retenir

- Pour f continue et positive, $\int_a^b f(x) \, dx$ est l'**aire** sous la courbe, en unités d'aire.
- $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$ où F est une **primitive** de f .
- L'intégrale est **linéaire** et vérifie la relation de **Chasles** ; échanger les bornes change le signe.
- Si $f \leq g$ (avec $a \leq b$), alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$; on encadre avec $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.
- Valeur moyenne : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx$.
- Intégration par parties : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$.
- Aire entre deux courbes : $\int_a^b (f - g)$ avec $f \geq g$; une aire est toujours positive.

Le livre de cours de maths Terminale

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Terminale

Changer de niveau

Niveau : Terminale

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Calcul intégral : exercices de maths
Terminale

 Contrôles de maths

Calcul intégral : contrôle de maths
Terminale

 QCM de maths

Calcul intégral : QCM de maths
Terminale

 Exercices de maths

Fonctions trigonométriques : exercices
de maths Terminale

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Géométrie dans l'espace : exercices de maths Terminale

Fonctions trigonométriques : contrôle de maths Terminale

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage