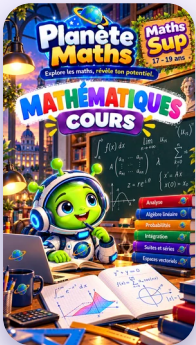


Intégration et primitives : cours de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

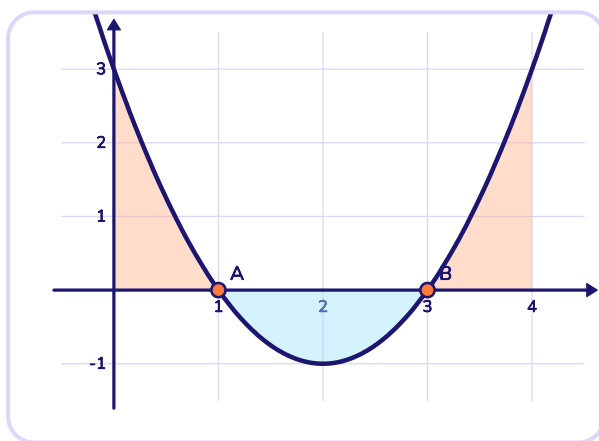
[Voir le livre](#)

Calculer une aire, retrouver une position à partir d'une vitesse, résoudre une équation qui décrit une désintégration ou une oscillation : toutes ces tâches reposent sur l'intégration. Ce chapitre rassemble les outils de première année : intégrale d'une fonction continue par morceaux, primitives, intégration par parties, changement de variable, sommes de Riemann, formule de Taylor avec reste intégral, puis équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2.

1. Intégrale d'une fonction continue par morceaux

D Fonction continue par morceaux

Une fonction f est **continue par morceaux** sur $[a; b]$ s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$ telle que f soit continue sur chaque $]x_{i-1}; x_i[$ et admette une limite finie à droite et à gauche en chaque x_i . Son intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est l'**aire algébrique** comprise entre la courbe et l'axe des abscisses : comptée positivement au-dessus de l'axe, négativement en dessous.



Pour $f(x) = x^2 - 4x + 3$ sur $[0; 4]$, les deux aires orange (de 0 à 1 et de 3 à 4) valent chacune $\frac{4}{3}$, l'aire cyan (de 1 à 3) vaut $\frac{4}{3}$ comptée négativement : l'intégrale totale vaut $\frac{4}{3} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$.

P

Propriétés de l'intégrale

- Linéarité : $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
- Relation de Chasles : $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$, et $\int_b^a f = - \int_a^b f$.
- Positivité et croissance (pour $a \leq b$) : si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f \geq 0$; si $f \leq g$ alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- Inégalité triangulaire : $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.



Piège

Une intégrale nulle ne signifie pas que la fonction est nulle : $\int_0^2 (x-1) dx = 0$. Il faut ajouter les hypothèses « f continue **et** positive » pour conclure que $f = 0$.

2. Primitives et théorème fondamental

D

Primitive

Une primitive de f sur un intervalle I est une fonction dérivable F telle que $F' = f$ sur I . Deux primitives de f sur un intervalle diffèrent d'une constante.

P**Théorème fondamental de l'analyse**

Si f est continue sur l'intervalle I et $a \in I$, alors $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a . Pour toute primitive F de f :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) = \left[F(t) \right]_a^b.$$

Table des primitives à connaître (les constantes additives sont omises) :

Fonction f	Une primitive F	Intervalle
$x^n (n \in \mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x; \sin x$	$\sin x; -\cos x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$] -1; 1[$
$u'u^\alpha; \frac{u'}{u};$ $u'e^u$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}; \ln u ;$ e^u	là où u est dérivable (et $u \neq 0$ pour $\ln$)

E**Exemple 1 : primitive d'une composée**

Calculer $\int_0^2 \frac{x}{1+x^2} dx$.

Avec $u(x) = 1 + x^2$, on a $u'(x) = 2x$, donc $\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u'}{u}$ et une primitive est $\frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

$$\int_0^2 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \ln 1 = \frac{\ln 5}{2}.$$

3. Intégration par parties**P****Intégration par parties**

Si u et v sont de classe C^1 sur $[a; b]$:

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = \left[u(t) v(t) \right]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt.$$

Elle découle de la dérivée d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$, intégrée entre a et b .

M**Méthode**

1. Repérer un facteur qui se simplifie en dérivant (polynôme, **ln**, **arctan**) : ce sera u .
2. Prendre pour v' le facteur dont on connaît une primitive (e^x , **cos** x , ou **1**).
3. Appliquer la formule et vérifier que la nouvelle intégrale est plus simple.

E**Exemple 2 : un produit polynôme $\times$ exponentielle**

Calculer $\int_0^1 x e^x dx$. On pose $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$, donc $u' = 1$ et $v = e^x$.

$$\int_0^1 x e^x dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - (e - 1) = 1.$$

4. Changement de variable**P****Changement de variable**

Si φ est de classe C^1 sur $[\alpha; \beta]$ et f continue sur $\varphi([\alpha; \beta])$, alors

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

M**Méthode**

1. Poser $x = \varphi(t)$ et remplacer dx par $\varphi'(t) dt$.
2. Changer les bornes : $t = \alpha$ correspond à $x = \varphi(\alpha)$.
3. Calculer la nouvelle intégrale, sans revenir à l'ancienne variable.

E**Exemple 3 : l'aire d'un quart de disque**

Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$. On pose $x = \sin t$ avec $t \in [0; \pi/2]$: $dx = \cos t dt$ et $\sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$ (positif sur cet intervalle).

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4}, \text{ ce qui est bien l'aire d'un quart de disque de rayon } 1.$$

!**Astuce de Zyro**

Avant tout calcul, regarde la parité : si f est impaire, $\int_{-a}^a f = 0$; si f est paire, $\int_{-a}^a f = 2 \int_0^a f$. Cela évite parfois toute intégration.

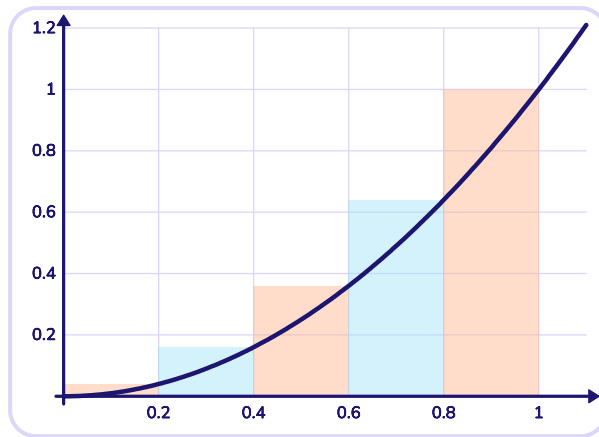
5. Sommes de Riemann**P****Convergence des sommes de Riemann**

Si f est continue sur $[a; b]$, alors

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

En particulier, sur $[0; 1]$: $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f$. Si f est de classe C^1 avec

$$|f'| \leq M, \text{ l'erreur vérifie } \left| S_n - \int_a^b f \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{2n}.$$



Sur la figure, la somme à droite de $x \mapsto x^2$ avec $n = 5$ vaut $\frac{1}{5} \left(\frac{1}{25} + \frac{4}{25} + \frac{9}{25} + \frac{16}{25} + \frac{25}{25} \right) = 0,44$, un peu plus que $\frac{1}{3}$.

E Exemple 4 : limite d'une somme

Déterminer la limite de $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$.

On factorise : $\frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + (k/n)^2}$, donc $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$, continue sur $[0; 1]$.

Ainsi $u_n \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$.

6. Formule de Taylor avec reste intégral

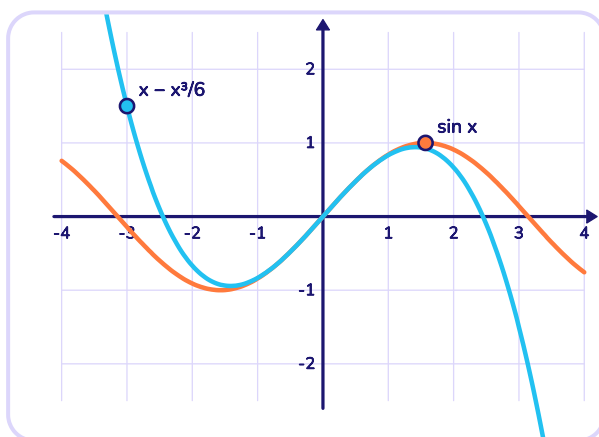
P Taylor avec reste intégral

Si f est de classe C^{n+1} sur un intervalle I contenant a et x :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Si $|f^{(n+1)}| \leq M$ sur I , le reste vérifie $|R_n(x)| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$.

La preuve se fait par récurrence sur n : pour passer de $n-1$ à n , on intègre le reste par parties en dérivant $f^{(n)}$ et en intégrant $(x-t)^{n-1}/(n-1)!$. Contrairement à Taylor-Young, qui est local, cette formule est **globale** et donne une erreur explicite.



E**Exemple 5 : approcher un sinus**

Pour $f = \sin$, $a = 0$, $n = 4$: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + R_4(x)$ (le terme de degré 4 est nul)

et $|R_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{120}$ car $|\cos| \leq 1$.

Pour $x = 0,5$: $0,5 - \frac{0,125}{6} \approx 0,47917$ avec une erreur d'au plus
 $\frac{0,03125}{120} \approx 2,6 \times 10^{-4}$.

7. Équations différentielles linéaires d'ordre 1**D****Équation linéaire d'ordre 1**

Soit a et b continues sur un intervalle I . L'équation $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ a pour équation homogène $(H) : y' + a(x)y = 0$. Si A est une primitive de a , les solutions de (H) sont $y = C e^{-A(x)}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

P**Structure des solutions**

La solution générale de (E) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de (H) . Pour toute condition $y(x_0) = y_0$ avec $x_0 \in I$, il existe **une unique** solution.

M**Méthode**

1. Résoudre (H) et écrire $y_H = C e^{-A(x)}$.
2. Chercher une solution particulière : forme analogue au second membre, ou variation de la constante $y = C(x) e^{-A(x)}$ qui donne $C'(x) = b(x) e^{A(x)}$.
3. Additionner, puis déterminer la constante avec la condition initiale.

E**Exemple 6 : un second membre affine**

Résoudre $y' + 2y = 6x$ avec $y(0) = 1$.

Solutions de (H) : $y = C e^{-2x}$. On cherche $y_p = \alpha x + \beta$: $\alpha + 2\alpha x + 2\beta = 6x$, donc $\alpha = 3$ et $\beta = -\frac{3}{2}$.

Solution générale : $y = 3x - \frac{3}{2} + C e^{-2x}$. Or $y(0) = -\frac{3}{2} + C = 1$, donc $C = \frac{5}{2}$ et $y(x) = 3x - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} e^{-2x}$.

8. Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

On étudie (E) : $y'' + a y' + b y = f(x)$, avec a, b réels. L'équation caractéristique est $r^2 + a r + b = 0$, de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

P**Solutions de l'équation homogène**

- Si $\Delta > 0$, racines réelles $r_1 \neq r_2$: $y = A e^{r_1 x} + B e^{r_2 x}$.
- Si $\Delta = 0$, racine double r : $y = (A + Bx) e^{rx}$.
- Si $\Delta < 0$, racines $\alpha \pm i\beta$: $y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$.

Avec les conditions $y(x_0)$ et $y'(x_0)$ imposées, la solution est unique. La solution générale de (E) est une solution particulière plus la solution générale de l'équation homogène.

Pour un second membre $f(x) = e^{\lambda x} P(x)$, on cherche une solution particulière $e^{\lambda x} Q(x)$ avec $\deg Q = \deg P + m$, où m est l'ordre de λ comme racine de l'équation caractéristique (0, 1 ou 2).

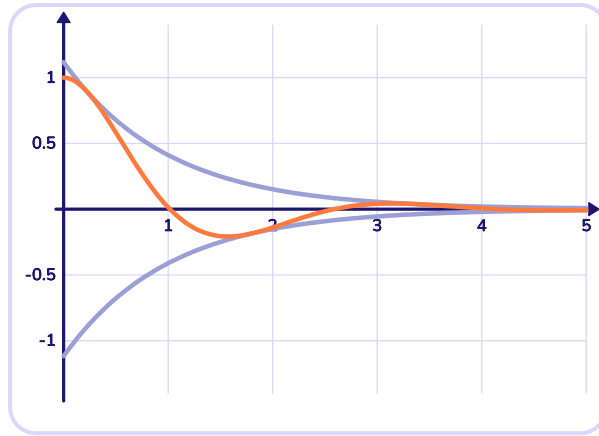
E**Exemple 7 : oscillation amortie**

Résoudre $y'' + 2y' + 5y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

$r^2 + 2r + 5 = 0$ a pour discriminant $4 - 20 = -16$, donc $r = -1 \pm 2i$ et $y = e^{-x} (A \cos 2x + B \sin 2x)$.

$y(0) = A = 1$. Puis $y'(0) = -A + 2B = 0$, donc $B = \frac{1}{2}$:

$$y(x) = e^{-x} \left(\cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right).$$



La courbe oscille mais l'amplitude décroît comme e^{-x} : c'est le comportement d'un ressort avec frottement.

À retenir

- L'intégrale est une **aire algébrique** ; elle est linéaire, croissante et vérifie la relation de Chasles.

- $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ pour toute primitive F d'une fonction continue f .

- **Parties** : $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$; **changement de variable** : on change aussi les bornes.

- Somme de Riemann : $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f$ pour f continue.

- **Taylor avec reste intégral** : reste $\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$, majoré par $M |x-a|^{n+1}/(n+1)!$.

- Ordre 1 : $y = y_p + C e^{-A(x)}$; ordre 2 : on lit la solution homogène sur les racines de $r^2 + ar + b = 0$.

Le livre de cours de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Intégration et primitives : exercices de maths Maths Sup

Contrôles de maths

Intégration et primitives : contrôle de maths Maths Sup

QCM de maths

Intégration et primitives : QCM de maths Maths Sup

Exercices de maths

Arithmétique et polynômes : exercices de maths Maths Sup

 Exercices de maths

Groupes, anneaux et corps : exercices de maths Maths Sup

 Contrôles de maths

Arithmétique et polynômes : contrôle de maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage