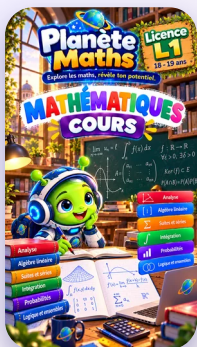


Intégration et primitives : cours de maths Licence L1 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Intégrer, c'est mesurer une accumulation : une aire, une distance parcourue, une quantité de chaleur. Ce chapitre construit l'intégrale de Riemann, la relie aux primitives et vous donne les trois grandes techniques de calcul : intégration par parties, changement de variable et décomposition en éléments simples. Il se termine par les intégrales généralisées.

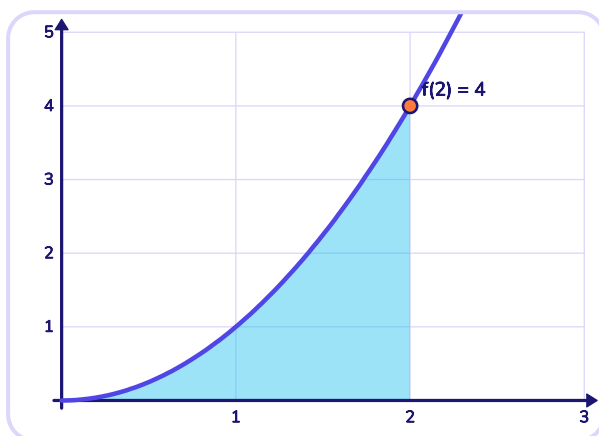
1. L'intégrale de Riemann

Soit f une fonction continue sur un segment $[a ; b]$. On note $\int_a^b f(x) dx$ son **intégrale** : lorsque f est positive, c'est l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$. Lorsque f change de signe, les aires situées sous l'axe comptent négativement.

D

Définition

Une fonction f est **continue par morceaux** sur $[a; b]$ s'il existe une subdivision finie de $[a; b]$ telle que f soit continue sur chaque intervalle ouvert et admette des limites finies aux bornes. Toute fonction continue par morceaux est intégrable au sens de Riemann.



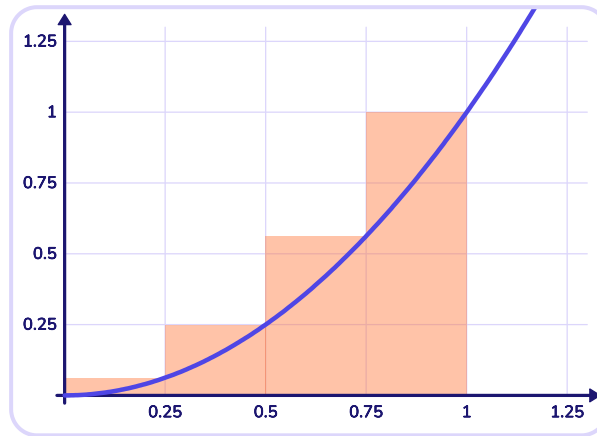
P

Propriétés de l'intégrale

- Linéarité : $\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
- Relation de Chasles : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
- Positivité : si $f \geq 0$ et $a \leq b$, alors $\int_a^b f \geq 0$. Par suite, si $f \leq g$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- Inégalité triangulaire : $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.
- Valeur moyenne : $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

2. Sommes de Riemann

Découpons $[a; b]$ en n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$. La **somme de Riemann** de f est $S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$: c'est l'aire de n rectangles minces.



P Théorème

Si f est continue sur $[a; b]$, alors S_n tend vers $\int_a^b f(x) dx$ quand $n \rightarrow +\infty$. En particulier, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx$.

E Exemple 1 : une limite de somme

Soit $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$. On écrit $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + (k/n)^2}$, somme de Riemann de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0; 1]$. Donc $u_n \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

3. Primitives et théorème fondamental

D Primitive

Une **primitive** de f sur un intervalle I est une fonction dérivable F telle que $F' = f$ sur I . Deux primitives diffèrent d'une constante.

P Théorème fondamental

Si f est continue sur I et $a \in I$, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a . Pour toute primitive F de f :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b.$$

Voici les primitives usuelles à connaître par cœur (la constante C est omise).

Fonction f	Primitive F	Sur
$x^\alpha (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0; +\infty[$ en général
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x; \sin x$	$\sin x; -\cos x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$] -1; 1[$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	là où $u \neq 0$

E Exemple 2 : calcul direct

$$\int_1^2 \left(3x^2 - \frac{1}{x} \right) dx = [x^3 - \ln x]_1^2 = (8 - \ln 2) - (1 - 0) = 7 - \ln 2.$$

4. Intégration par parties

P Formule

Si u et v sont de classe C^1 sur $[a; b]$:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx.$$

M Méthode

1. Repérer le facteur que la dérivation simplifie (polynôme, $\ln x$, arctangente) : ce sera u .
2. Le reste est v' : en trouver une primitive v .
3. Appliquer la formule et calculer la nouvelle intégrale, plus simple.

E Exemple 3 : intégration par parties

Calculons $\int_1^e x \ln x dx$. Posons $u = \ln x$ et $v' = x$, donc $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \frac{x^2}{2}$. Alors

$$\int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

! Le coup de Zyro

Pour intégrer $\ln x$ seul, écrivez $\ln x = 1 \times \ln x$ et posez $v' = 1$: vous obtenez la primitive $x \ln x - x$.

5. Changement de variable

P Théorème

Si φ est de classe C^1 sur $[\alpha; \beta]$ et f continue sur l'intervalle contenant $\varphi([\alpha; \beta])$, alors
$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

M Méthode

1. Choisir la substitution $u = \varphi(t)$ qui fait apparaître $du = \varphi'(t) dt$.
2. Changer **aussi les bornes**.
3. Calculer la primitive en u puis évaluer : on ne revient pas à t .

E Exemple 4 : changement de variable

$\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$: avec $u = x^2 + 1$, $du = 2x dx$; les bornes deviennent 1 et 2. Donc l'intégrale vaut $\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{\ln 2}{2}$.

⚠ Attention

Oublier de changer les bornes ou le facteur dx est l'erreur la plus fréquente. Vérifiez aussi que φ est bien C^1 sur le segment.

6. Fractions rationnelles

Pour intégrer $\frac{P(x)}{Q(x)}$, on commence par la division euclidienne si $\deg P \geq \deg Q$, puis on décompose le reste en **éléments simples** : $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{(x-a)^k}$ ou $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ (discriminant négatif).

M Méthode

1. Factoriser le dénominateur.
2. Écrire la forme de la décomposition avec des coefficients inconnus.
3. Les trouver (multiplier par $x-a$ puis évaluer en a , ou identifier).
4. Intégrer terme à terme : $\ln|x-a|$, puissances, ou **arctan** après mise sous forme canonique.

E Exemple 5 : éléments simples

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right). \text{ Donc sur }]1; +\infty[, \text{ une primitive est } \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1},$$
$$\text{et } \int_2^3 \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

Pour un trinôme sans racine réelle : $x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$, d'où

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+1}{2} + C.$$

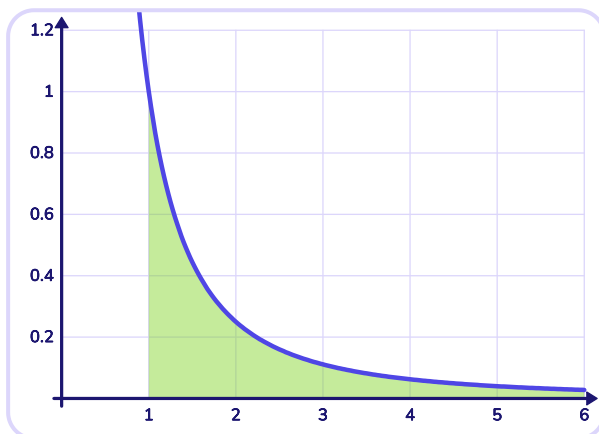
7. Intégrales généralisées

Quand l'intervalle est non borné ou que la fonction explose à une borne, on définit l'intégrale comme une limite.

D

Définition

Si f est continue sur $[a; +\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est **convergente** si $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f$ existe et est finie ; cette limite est sa valeur. Sinon elle est divergente. On procède de même en une borne où f n'est pas définie.



P

Intégrales de Riemann

- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Comparaison. Si $0 \leq f \leq g$, la convergence de $\int g$ entraîne celle de $\int f$, et la divergence de $\int f$ entraîne celle de $\int g$.

E**Exemple 6 : deux intégrales généralisées**

$$\int_0^A e^{-x} dx = 1 - e^{-A} \rightarrow 1, \text{ donc } \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1. \text{ Et}$$

$$\int_\varepsilon^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon \rightarrow -1 : \int_0^1 \ln x dx = -1.$$

À retenir

- $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ pour toute primitive F d'une fonction continue f .
- Une somme de Riemann $\frac{1}{n} \sum f(k/n)$ converge vers $\int_0^1 f$.
- Par parties : $\int uv' = [uv] - \int u'v$; on change les bornes avec la variable.
- Fraction rationnelle : division, factorisation, éléments simples, puis **ln** et **arctan**.
- $\int_1^{+\infty} t^{-\alpha} dt$ converge si $\alpha > 1$; $\int_0^1 t^{-\alpha} dt$ converge si $\alpha < 1$.

Le livre de cours de maths Licence L1

Tout le programme en un seul PDF de 99 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Intégration et primitives : exercices de maths Licence L1

 Contrôles de maths

Intégration et primitives : contrôle de maths Licence L1

 QCM de maths

Intégration et primitives : QCM de maths Licence L1

 Exercices de maths

Équations différentielles linéaires : exercices de maths Licence L1

 Exercices de maths

Complexes et polynômes : exercices de maths Licence L1

 Contrôles de maths

Équations différentielles linéaires : contrôle de maths Licence L1

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage