

Intégration et primitives : exercices corrigés de maths Maths Sup à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Primitives à connaître



a) $\frac{x^5}{5}$. b) $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, primitive $\frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$. c) $\frac{e^{2x}}{2}$. d) $\frac{\sin(3x)}{3}$. e) $x^{-1/2}$ a pour primitive $\frac{x^{1/2}}{1/2} = 2\sqrt{x}$.

Chaque résultat se vérifie en dérivant.

2 Intégrale d'un polynôme



Une primitive de $3x^2 - 2x + 1$ est $x^3 - x^2 + x$. Donc

$$\int_0^2 = \left[x^3 - x^2 + x \right]_0^2 = (8 - 4 + 2) - 0 = 6.$$

3 Trois intégrales usuelles



$$A = \left[-\cos t \right]_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

$$B = \left[\ln t \right]_1^e = 1 - 0 = 1.$$

$$C = \left[\frac{e^{3t}}{3} \right]_0^1 = \frac{e^3 - 1}{3}.$$

4 Aire sous une parabole



On a $f(x) = x(4 - x) \geq 0$ sur $[0; 4]$, donc l'aire est l'intégrale de f .

$$\int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}.$$

L'aire vaut $\frac{32}{3} \approx 10,67$ unités d'aire.

5 Vrai ou faux ?



a) **Vrai** : $x \mapsto x^3$ est impaire, ou directement $\left[\frac{x^4}{4} \right]_{-2}^2 = 4 - 4 = 0$.

b) **Vrai** : sur $[0; 1]$, $x^2 \leq x$, donc par croissance de l'intégrale $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$.

c) **Faux** : avec $f(x) = x - 1$, $\int_0^2 (x - 1) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^2 = 0$ alors que $f(0) = -1$.

6 Chasles et linéarité



Par Chasles, $\int_0^5 f = 5 + (-3) = 2$. Puis $\int_5^0 f = -2$.

Par linéarité, $\int_0^5 (2f - 3g) = 2 \times 2 - 3 \times 4 = -8$.

7 Valeur moyenne



$$\mu = \frac{1}{4-1} \int_1^4 (2x+1) dx = \frac{1}{3} [x^2 + x]_1^4 = \frac{20-2}{3} = 6.$$

On retrouve $f(2,5) = 6$: pour une fonction affine, la valeur moyenne est atteinte au milieu de l'intervalle.

8 Une intégration par parties



On pose $u = x$, $v' = e^{2x}$; alors $u' = 1$ et $v = \frac{e^{2x}}{2}$.

$$\int_0^1 x e^{2x} dx = \left[\frac{x e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 - 1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

9 Un logarithme à intégrer



On pose $u = \ln x$ et $v' = x^2$; donc $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \frac{x^3}{3}$.

$$\int_1^e x^2 \ln x dx = \left[\frac{x^3 \ln x}{3} \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3 - 1}{9} = \frac{2e^3 + 1}{9}.$$

10 Un changement de variable



Avec $u = 1 + x^2$, $du = 2x dx$; les bornes deviennent $u = 1$ pour $x = 0$ et $u = 2$ pour $x = 1$.

$$\int_0^1 x(1+x^2)^3 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 u^3 du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^4}{4} \right]_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{16-1}{4} = \frac{15}{8}.$$

11 Équation homogène



Ici $a(x) = -2$, de primitive $A(x) = -2x$. Les solutions sont $y = C e^{2x}$.

La condition $y(1) = C e^2 = 3$ donne $C = 3e^{-2}$, donc $y(x) = 3 e^{2x-2} = 3 e^{2(x-1)}$.

12 Ordre 2 : deux racines réelles



L'équation caractéristique $r^2 - 5r + 6 = 0$ a pour racines 2 et 3 ($\Delta = 1$). Donc

$$y = Ae^{2x} + Be^{3x}.$$

$$y(0) = A + B = 1 \text{ et } y'(0) = 2A + 3B = 0. \text{ On en tire } B = -2 \text{ et } A = 3.$$

La solution est $y(x) = 3e^{2x} - 2e^{3x}$.

13 Primitives de fonctions composées



a) De la forme $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 1$: $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$.

b) $u'e^u$ avec $u = x^3$: e^{x^3} .

c) $u'u^3$ avec $u = \sin x$: $\frac{\sin^4 x}{4}$.

d) $\frac{1}{2} \frac{u'}{u}$ avec $u = 2x + 3 > 0$: $\frac{1}{2} \ln(2x + 3)$.

14 Une somme de Riemann exacte



$$S_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

$$\text{Pour } n = 10 : S_{10} = \frac{11 \times 21}{600} = \frac{231}{600} = 0,385.$$

Enfin $S_n = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2 dx$, conformément au théorème sur les sommes de Riemann.

15 Un oscillateur sans frottement



L'équation caractéristique $r^2 + 9 = 0$ donne $r = \pm 3i$, donc $y = A \cos 3x + B \sin 3x$.

$$y(0) = A = 2 \text{ et } y'(0) = 3B = 6, \text{ donc } B = 2 : y(x) = 2 \cos 3x + 2 \sin 3x.$$

Comme $2 \cos 3x + 2 \sin 3x = 2\sqrt{2} \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$, l'amplitude vaut $2\sqrt{2} \approx 2,83$.

16 Intégrer deux fois par parties

★★★★

Première intégration par parties ($u = \sin x, v' = e^x$) : $I = \left[e^x \sin x \right]_0^\pi - J = -J$, avec $J = \int_0^\pi e^x \cos x \, dx$.

Seconde ($u = \cos x, v' = e^x$) : $J = \left[e^x \cos x \right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \sin x \, dx = (-e^\pi - 1) + I$.

Donc $I = -J = e^\pi + 1 - I$, d'où $I = \frac{e^\pi + 1}{2} \approx 12,07$.

17 Une intégrale avec exponentielle

★★★★

$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}$. Avec $u = 1 + e^{-x}$, $u' = -e^{-x}$, donc ce quotient vaut $-\frac{u'}{u}$ et une primitive est $-\ln(1 + e^{-x})$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = -\ln(1 + e^{-1}) + \ln 2 = \ln \frac{2}{1 + e^{-1}} = \ln \frac{2e}{e + 1} \approx 0,38.$$

18 Limite par sommes de Riemann

★★★★

a) $u_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.

b) $\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+k/n}$, donc $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f(x) = \frac{1}{1+x}$ continue sur $[0; 1]$.

Ainsi $u_n \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$.

19 Approcher e par Taylor

★★★

a) $R_n(1) = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$. Comme $1 \leq e^t \leq e \leq 3$ sur $[0; 1]$ et $\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} dt = \frac{1}{(n+1)!}$, on a $0 \leq R_n(1) \leq \frac{3}{(n+1)!}$.

b) Pour $n = 5$, $\frac{3}{720} \approx 4,2 \times 10^{-3}$: trop grand. Pour $n = 6$, $\frac{3}{5040} \approx 5,95 \times 10^{-4} < 10^{-3}$.
Le plus petit n est 6.

Alors $\sum_{k=0}^6 \frac{1}{k!} = \frac{1957}{720} \approx 2,71806$, et $2,7180 \leq e \leq 2,7187$.

20 Équation d'ordre 1 avec second membre

★★★

Équation homogène : $y = C e^{-x}$. On pose $y = C(x) e^{-x}$; alors $y' + y = C'(x) e^{-x}$.

On veut $C'(x) e^{-x} = x e^{-x}$, donc $C'(x) = x$ et $C(x) = \frac{x^2}{2} + k$.

Les solutions sont $y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + k \right) e^{-x}$. La condition $y(0) = k = 3$ donne

$$y(x) = \left(\frac{x^2}{2} + 3 \right) e^{-x}.$$

21 Ordre 2 avec second membre

★★★

Homogène : $r^2 - 3r + 2 = 0$ a pour racines 1 et 2, donc $y_H = A e^x + B e^{2x}$.

Particulière : 3 n'est pas racine, on cherche $y_p = c e^{3x}$: $9c - 9c + 2c = 4$, donc $c = 2$.

Solution générale : $y = A e^x + B e^{2x} + 2e^{3x}$. Alors $y(0) = A + B + 2 = 0$ et $y'(0) = A + 2B + 6 = 0$. On soustrait : $B + 4 = 0$, donc $B = -4$ et $A = 2$.

$$y(x) = 2e^x - 4e^{2x} + 2e^{3x}.$$

22 Une suite d'intégrales



a) $I_0 = \int_0^1 e^x dx = e - 1.$

b) Intégration par parties avec $u = x^n, v' = e^x$:

$$I_n = \left[x^n e^x \right]_0^1 - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx = e - n I_{n-1}.$$

c) $I_1 = e - (e - 1) = 1$; $I_2 = e - 2$; $I_3 = e - 3(e - 2) = 6 - 2e \approx 0,56.$

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Sup

Tout le programme en un seul PDF de 134 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Intégration et primitives : exercices de maths Maths Sup

QCM de maths

Intégration et primitives : QCM de maths Maths Sup



Contrôles de maths

Intégration et primitives : contrôle de maths Maths Sup



Exercices de maths

Arithmétique et polynômes : exercices de maths Maths Sup



Exercices de maths

Groupes, anneaux et corps : exercices de maths Maths Sup



QCM de maths

Arithmétique et polynômes : QCM de maths Maths Sup

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage