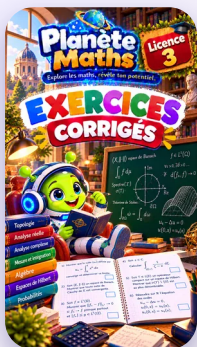


Intégrales à paramètres et Fubini : exercices de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

22 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Dériver une intégrale polynomiale

★ ★ ★

Soit $F(x) = \int_0^1 (xt + t^2) dt$. Calcule $F(x)$, puis $F'(x)$, et compare avec $\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} (xt + t^2) dt$.

2 Fubini sur un rectangle

★ ★ ★

Calcule $I = \iint_{[0,1] \times [0,2]} 3x^2 y \, dx \, dy$.

3 Premières valeurs de Gamma



Donne la valeur exacte de $\Gamma(4)$, $\Gamma(6)$, $\Gamma(\frac{3}{2})$ et $\Gamma(\frac{5}{2})$.

4 Mesures de produits



Calcule la mesure de Lebesgue plane de : (a) $[0, 3] \times [1, 5]$; (b) $([0, 2] \cup [5, 6]) \times [-1, 1]$; (c) $\{0\} \times [0, 10]$.

5 Intégrales en exponentielle



Calcule $\int_0^{+\infty} t e^{-3t} dt$ et $\int_0^{+\infty} t^3 e^{-2t} dt$ à l'aide de la fonction Γ .

6 Vrai ou faux ?



Justifie chaque réponse. (a) Si $f \geq 0$ est mesurable sur $\mathbb{R}^2$, alors $\iint f dx dy = \iint f dy dx$, même si ces quantités valent $+\infty$. (b) $\Gamma(0)$ est définie par la formule intégrale. (c) Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$.

7 Aire d'un disque en polaires



Calcule l'aire du disque de centre O et de rayon 3 par changement de variables en polaires.

8 Continuité et dérivabilité



Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) dt$. (a) Montre que F est continue sur $\mathbb{R}$. (b) Montre que F est de classe C^1 et exprime F' . (c) Calcule $F(0)$ et $F'(0)$.

9 Inverser deux intégrales



Calcule $I = \int_0^1 \left(\int_y^1 \cos(x^2) dx \right) dy$ en inversant l'ordre d'intégration. Donne une valeur approchée à 10^{-3} près.

10 Un triangle



Soit $T = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$. Calcule $\iint_T (x + y) dx dy$, puis vérifie ton résultat par un argument de symétrie sur le carré $[0, 1]^2$.

11 Gamma et substitutions



Calcule (a) $\int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t} dt$; (b) $\int_0^{+\infty} u^4 e^{-u^2} du$ (poser $t = u^2$).

12 Quart de disque



Soit $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Calcule $\iint_D xy dx dy$ en polaires, puis vérifie par Fubini en coordonnées cartésiennes.

13 Quand la domination échoue



Pour $x \geq 0$, soit $F(x) = \int_0^{+\infty} x e^{-xt} dt$. Calcule $F(x)$ pour $x > 0$ et pour $x = 0$. La fonction F est-elle continue en 0 ? Explique pourquoi le théorème de continuité ne s'applique pas.

14 Espérance du minimum



Deux nombres X et Y sont tirés indépendamment et uniformément dans $[0, 1]$. Leur loi conjointe a pour densité 1 sur le carré unité. Calcule $E[\min(X, Y)]$ et $E[\max(X, Y)]$.

15 Un contre-exemple à Fubini

★★★★

Sur $]0, 1]^2$, soit $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$. (a) Calcule $\int_0^1 f(x, y) dy$ pour $x \in]0, 1]$, puis $\int_0^1 \left(\int_0^1 f dy \right) dx$. (b) Calcule l'intégrale itérée dans l'autre ordre. (c) Conclut sur l'intégrabilité de f .

16 L'intégrale de Gauss

★★★★

Montre que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ puis que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.

17 Gamma : continuité et factorielle

★★★★

(a) Soit $[a, b] \subset]0, +\infty[$. Trouve une majorante intégrable de $t^{x-1}e^{-t}$ valable pour tout $x \in [a, b]$, et déduis la continuité de Γ . (b) Montre $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ puis $\Gamma(n+1) = n!$.

18 Une équation différentielle par dérivation

★★★★

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt$. (a) Justifie que F est C^1 et écris $F'(x)$. (b) Par une intégration par parties, montre que $F'(x) = -\frac{x}{2}F(x)$. (c) Déduis $F(x)$ en admettant $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

19 Volume d'une boule par tranches

★★★★

Dans $\mathbb{R}^3$, calcule le volume de la boule de rayon 2 en intégrant l'aire de ses sections par des plans $z = \text{constante}$.

20 La fonction Bêta



Pour $a, b > 0$, $B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$. On admet $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ (preuve par Tonelli et changement de variables). (a) Vérifie la formule pour $(a, b) = (2, 3)$. (b) Calcule $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ par la formule, puis directement avec $t = \sin^2 \theta$.

21 Convolution de deux indicatrices



Soit $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$ et $(f * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)f(x-t) dt$. (a) Calcule $(f * f)(x)$ pour tout x . (b) Par Tonelli, calcule $\int_{\mathbb{R}} (f * f)(x) dx$ sans utiliser (a), puis vérifie avec (a).

22 Une série d'intégrales



Montre que $\int_0^1 \frac{-\ln x}{1-x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, puis donne sa valeur en admettant $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

✓ Exercices corrigés de maths

Intégrales à paramètres et Fubini :
exercices corrigés de maths Licence L3

■ Cours de maths

Intégrales à paramètres et Fubini : cours
de maths Licence L3

🎯 QCM de maths

Intégrales à paramètres et Fubini : QCM
de maths Licence L3

✓ Exercices corrigés de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert :
exercices corrigés de maths Licence L3

✓ Exercices corrigés de maths

Séries de Fourier : exercices corrigés de
maths Licence L3

■ Cours de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert : cours
de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage