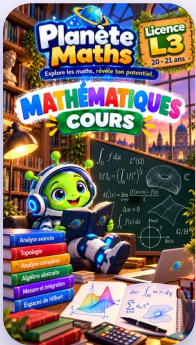


Intégrales à paramètres et Fubini : cours de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Calculer une aire par tranches, étudier une fonction définie par une intégrale, passer de coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires : trois gestes qui reposent sur un même socle, la théorie de l'intégration de Lebesgue. Ce chapitre rassemble les **théorèmes d'échange** (limite, dérivée, intégrale double) et en tire des résultats spectaculaires, comme la valeur de $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$ ou les propriétés de la fonction Γ .

1. Intégrale dépendant d'un paramètre

D Intégrale à paramètre

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ soit intégrable. On définit

$$F(x) = \int_{\Omega} f(x, t) d\mu(t), \quad x \in I.$$

Les questions naturelles sont : la fonction F est-elle continue ? dérivable ? Peut-on écrire $\lim_{x \rightarrow x_0} \int f(x, t) d\mu = \int \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, t) d\mu$? Ces échanges sont **faux en général** ; le théorème de convergence dominée donne une condition suffisante efficace, la **domination**.

2. Continuité sous l'intégrale

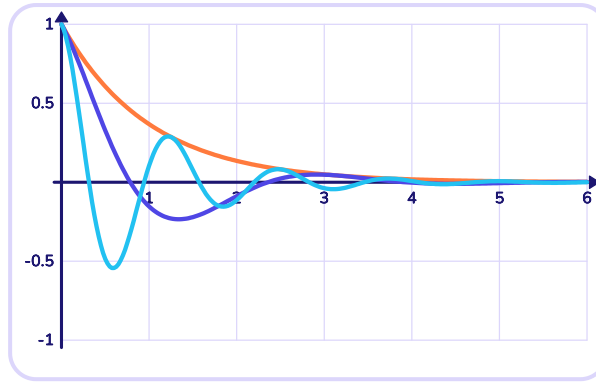
P Théorème de continuité

Soit $f : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose :

- pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est mesurable ;
- pour presque tout t , $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur I ;
- il existe g intégrable sur Ω telle que $|f(x, t)| \leq g(t)$ pour tout $x \in I$ et presque tout t .

Alors $F(x) = \int f(x, t) d\mu(t)$ est définie et continue sur I .

La preuve consiste à appliquer le théorème de convergence dominée à une suite quelconque $x_n \rightarrow x_0 : f(x_n, t) \rightarrow f(x_0, t)$ presque partout, et $|f(x_n, t)| \leq g(t)$. Si la domination n'est vraie que sur chaque segment $[a, b] \subset I$, la continuité reste vraie, car elle est locale.



E Exemple 1 : une intégrale oscillante

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) dt$ pour $x \in \mathbb{R}$. Pour tout x , $|e^{-t} \cos(xt)| \leq e^{-t}$ et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ d'intégrale 1. La fonction $x \mapsto e^{-t} \cos(xt)$ est continue : d'après le théorème, F est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et $F(0) = 1$.

I 3. Dérivation sous l'intégrale

P Théorème de dérivation (règle de Leibniz)

On suppose que :

- a. pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable ;
- b. pour presque tout t , $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur I ;
- c. il existe g intégrable telle que $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq g(t)$ pour tout $x \in I$ et presque tout t .

Alors F est de classe C^1 sur I et

$$F'(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) d\mu(t).$$

E

Exemple 2 : dériver l'intégrale oscillante

Reprenons $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) dt$. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -t e^{-t} \sin(xt)$, donc $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq t e^{-t}$, fonction intégrable d'intégrale $\Gamma(2) = 1$. Ainsi F est C^1 et

$$F'(x) = - \int_0^{+\infty} t e^{-t} \sin(xt) dt.$$

En particulier $F'(0) = 0$. Un calcul direct (partie réelle de $\int_0^{+\infty} e^{-(1-ix)t} dt = \frac{1}{1-ix}$) donne $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$, dont la dérivée en 0 est bien nulle.

⚠

Domination uniforme obligatoire

Pour $f(x, t) = x e^{-xt}$ sur $t \in [0, +\infty[: F(x) = 1$ si $x > 0$ mais $F(0) = 0$. La fonction F n'est pas continue en 0 : aucune majorante intégrable ne convient, car $\sup_{x>0} x e^{-xt} = \frac{1}{et}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

4. Mesure produit et théorème de Tonelli

D

Mesure produit

Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ sont des espaces mesurés σ -finis, il existe une unique mesure $\mu \otimes \nu$ sur la tribu produit $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ telle que

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A) \nu(B) \quad (A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}).$$

Pour les mesures de Lebesgue, $\lambda_n \otimes \lambda_p = \lambda_{n+p}$.

Par exemple, le rectangle $[0, 3] \times [1, 5]$ a pour mesure $3 \times 4 = 12$, et un segment $\{0\} \times [0, 10]$ a pour mesure $0 \times 10 = 0$: un segment est de mesure nulle dans le plan.

P Théorème de Tonelli

Soit $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ mesurable pour la tribu produit. Alors $x \mapsto \int f(x, y) d\nu(y)$ et $y \mapsto \int f(x, y) d\mu(x)$ sont mesurables et

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y),$$

les trois quantités étant égales dans $[0, +\infty]$.

Tonelli ne demande **aucune hypothèse d'intégrabilité** : seulement la positivité et la mesurabilité. C'est l'outil pour montrer qu'une fonction est intégrable sur un produit : on calcule $\int |f|$ par intégrales itérées.

I 5. Théorème de Fubini

P Théorème de Fubini

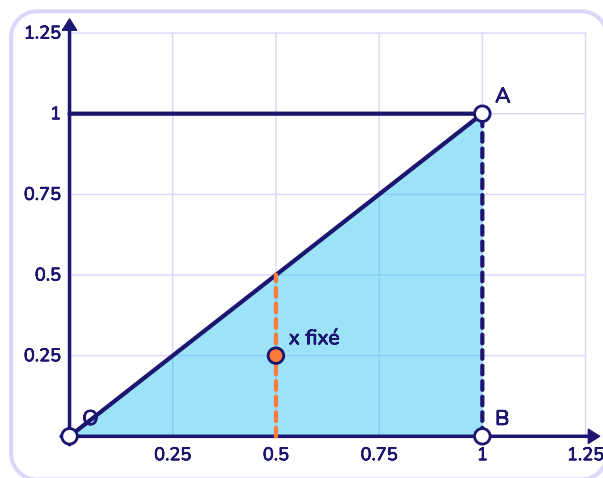
Soit f mesurable sur $X \times Y$ et intégrable pour $\mu \otimes \nu$ (c'est-à-dire $\int |f| d(\mu \otimes \nu) < +\infty$). Alors pour presque tout x , $y \mapsto f(x, y)$ est intégrable, la fonction $x \mapsto \int f(x, y) d\nu(y)$ est intégrable, et

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f d\nu \right) d\mu = \int_Y \left(\int_X f d\mu \right) d\nu.$$

M

Méthode : calculer une intégrale double

1. Décrire le domaine D et vérifier la mesurabilité de l'intégrande.
2. Montrer l'intégrabilité : si f est continue sur un compact, c'est automatique ; sinon, appliquer Tonelli à $|f|$.
3. Choisir l'ordre d'intégration qui donne une primitive explicite.
4. Décrire D par tranches dans cet ordre, puis calculer deux intégrales simples.



E

Exemple 3 : inverser l'ordre sur un triangle

Calculons $I = \int_0^1 \left(\int_y^1 \cos(x^2) dx \right) dy$. La fonction $x \mapsto \cos(x^2)$ n'a pas de primitive élémentaire. Le domaine est $\{0 \leq y \leq x \leq 1\}$ (le triangle coloré) ; la fonction est continue bornée sur ce compact, donc intégrable. D'après Fubini,

$$I = \int_0^1 \cos(x^2) \left(\int_0^x dy \right) dx = \int_0^1 x \cos(x^2) dx = \left[\frac{1}{2} \sin(x^2) \right]_0^1 = \frac{\sin 1}{2}.$$



Sans intégrabilité, Fubini est faux

Sur $]0, 1]^2$, soit $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$. Pour x fixé,
 $\int_0^1 f(x, y) dy = \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_0^1 = \frac{1}{1 + x^2}$, d'où $\int_0^1 \int_0^1 f dy dx = \frac{\pi}{4}$. Mais
 $f(y, x) = -f(x, y)$, donc l'autre ordre donne $-\frac{\pi}{4}$. Les deux intégrales itérées
 existent et diffèrent : f n'est pas intégrable sur le carré.

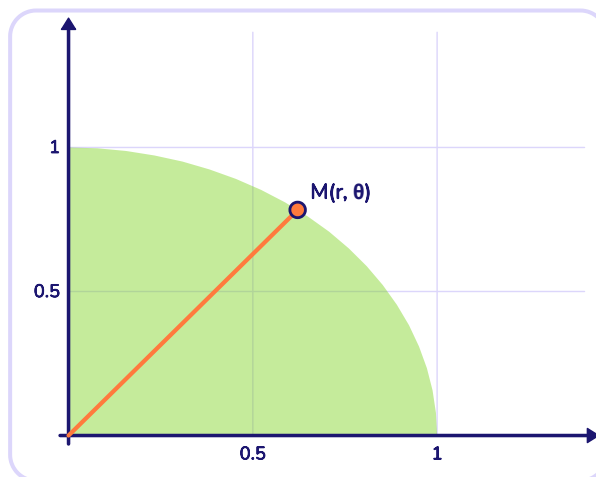
6. Changement de variables



Changement de variables dans $\mathbb{R}^n$

Soit $\varphi : U \rightarrow V$ un C^1 -difféomorphisme entre ouverts de $\mathbb{R}^n$ et f mesurable sur V , positive ou intégrable. Alors

$$\int_V f(y) dy = \int_U f(\varphi(x)) |\det J_\varphi(x)| dx.$$



Cas fondamental, les **coordonnées polaires** $\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) : |\det J_\varphi| = r$, et φ réalise un difféomorphisme de $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[$ sur le plan privé d'une demi-droite (la demi-droite retirée est un ensemble négligeable). Ainsi $dx dy = r dr d\theta$.

E

Exemple 4 : l'intégrale de Gauss

Posons $G = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$. D'après Tonelli, $G^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$. En polaires :

$$G^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{+\infty} = \pi.$$

Comme $G > 0$, on obtient $G = \sqrt{\pi}$.

7. La fonction Gamma

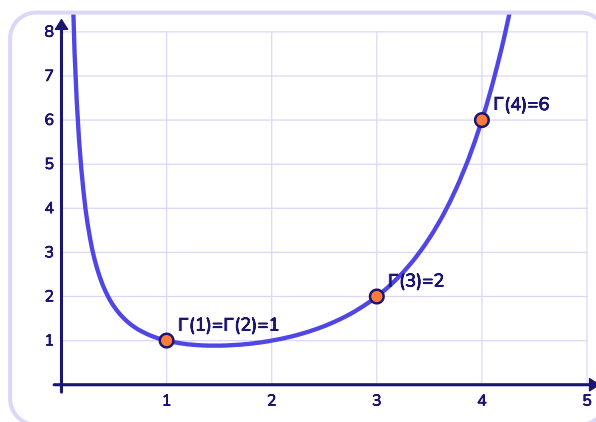
D

Fonction Gamma d'Euler

Pour $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

L'intégrale converge : en 0, $t^{x-1} e^{-t} \sim t^{x-1}$ est intégrable car $x > 0$; en $+\infty$, $t^{x-1} e^{-t} = o(t^{-2})$. Sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$, la domination par $g(t) = t^{a-1}$ pour $t \leq 1$ et $g(t) = t^{b-1} e^{-t}$ pour $t \geq 1$ assure que Γ est continue, et même de classe C^∞ par dérivations successives sous l'intégrale.



P

Propriétés de Gamma

- $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$ (intégration par parties).
- Pour tout entier $n \geq 0$, $\Gamma(n+1) = n!$.
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
- Pour $a > 0$, $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-at} dt = \frac{\Gamma(x)}{a^x}$.

x	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	4
$\Gamma(x)$	$\sqrt{\pi}$	1	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$	1	$\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	2	6

E

Exemple 5 : la valeur en un demi

Dans $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-1/2} e^{-t} dt$, le changement de variable $t = u^2$ ($dt = 2u du$) donne $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$, puisque l'intégrale de Gauss sur $\mathbb{R}$ vaut $\sqrt{\pi}$ et que l'intégrande est paire. On en déduit $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ et $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$.

!

Astuce de Zyro

Face à une intégrale en $t^k e^{-at}$, ne cherche pas de primitive : le changement $u = at$ la ramène à $\Gamma(k+1)/a^{k+1}$, et $\Gamma(k+1) = k!$ pour un entier k .

À retenir

- **Continuité** sous l'intégrale : continuité en x pour presque tout t et domination $|f(x, t)| \leq g(t)$, g intégrable.
- **Dérivation** sous l'intégrale : même chose avec $\partial_x f$; alors $F'(x) = \int \partial_x f d\mu$.
- **Tonelli** : pour $f \geq 0$ mesurable, l'ordre d'intégration est libre, sans autre hypothèse.
- **Fubini** : pour f intégrable sur le produit, les intégrales itérées existent et sont égales à l'intégrale double.
- **Changement de variables** : on multiplie par $|\det J_\varphi|$; polaires : $r dr d\theta$.
- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Le livre de cours de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 101 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Intégrales à paramètres et Fubini :
exercices de maths Licence L3

Intégrales à paramètres et Fubini :
contrôle de maths Licence L3

 **QCM de maths**

Intégrales à paramètres et Fubini : QCM
de maths Licence L3

 **Exercices de maths**

Espaces L_p et espaces de Hilbert :
exercices de maths Licence L3

 **Exercices de maths**

Séries de Fourier : exercices de maths
Licence L3

 **Contrôles de maths**

Espaces L_p et espaces de Hilbert :
contrôle de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage