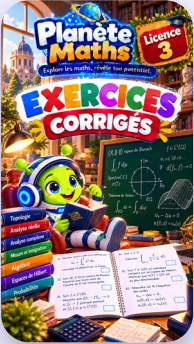


Intégrales à paramètres et Fubini : exercices corrigés de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Dériver une intégrale polynomiale



$$F(x) = x \int_0^1 t \, dt + \int_0^1 t^2 \, dt = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}, \text{ donc } F'(x) = \frac{1}{2}.$$

D'autre part $\frac{\partial}{\partial x}(xt + t^2) = t$ et $\int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}$. Les deux résultats coïncident, comme l'assure le théorème de dérivation (la dérivée partielle est bornée par 1, fonction intégrable sur $[0, 1]$).

2 Fubini sur un rectangle



La fonction est continue sur un compact : elle est intégrable et Fubini s'applique. Comme l'intégrande est un produit, $I = \left(\int_0^1 3x^2 \, dx \right) \left(\int_0^2 y \, dy \right) = 1 \times 2 = 2$.

Réponse : $I = 2$.

3 Premières valeurs de Gamma



$\Gamma(n+1) = n! : \Gamma(4) = 3! = 6$ et $\Gamma(6) = 5! = 120$.

Avec $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} : \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ et $\Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{3}{2}\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$.

4 Mesures de produits



On utilise $(\lambda \otimes \lambda)(A \times B) = \lambda(A)\lambda(B)$.

- a. $3 \times 4 = 12$.
- b. $\lambda([0, 2] \cup [5, 6]) = 2 + 1 = 3$ (union disjointe) et $\lambda([-1, 1]) = 2$: mesure **6**.
- c. $\lambda(\{0\}) = 0$, donc la mesure vaut $0 \times 10 = 0$.

5 Intégrales en exponentielle



Le changement $u = at$ donne $\int_0^{+\infty} t^k e^{-at} dt = \frac{\Gamma(k+1)}{a^{k+1}}$.

Pour $k = 1, a = 3 : \frac{\Gamma(2)}{3^2} = \frac{1}{9}$. Pour $k = 3, a = 2 : \frac{\Gamma(4)}{2^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.

6 Vrai ou faux ?



- a. Vrai : c'est le théorème de Tonelli, qui ne demande que positivité et mesurabilité.
- b. Faux : $\int_0^1 t^{-1} e^{-t} dt$ diverge (l'intégrande est équivalent à $1/t$ en 0), donc $\Gamma(0)$ n'existe pas.
- c. Vrai : l'intégrande $t^{x-1} e^{-t}$ est strictement positif sur $]0, +\infty[$, donc son intégrale est strictement positive.

7 Aire d'un disque en polaires



Avec $dx dy = r dr d\theta$: aire $= \int_0^{2\pi} \int_0^3 r dr d\theta = 2\pi \times \frac{3^2}{2} = 9\pi$.

On retrouve πR^2 avec $R = 3$.

8 Continuité et dérivabilité



a. Pour tout x et tout $t \geq 0$, $|e^{-t} \cos(xt)| \leq e^{-t}$, intégrable sur $[0, +\infty[$. Pour tout t , $x \mapsto e^{-t} \cos(xt)$ est continue. Par le théorème de continuité, F est continue.

b. $\frac{\partial}{\partial x}(e^{-t} \cos(xt)) = -t e^{-t} \sin(xt)$, de valeur absolue $\leq t e^{-t}$, intégrable ($\int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \Gamma(2) = 1$). Donc $F \in C^1$ et $F'(x) = -\int_0^{+\infty} t e^{-t} \sin(xt) dt$.

c. $F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$ et, puisque $\sin 0 = 0$, $F'(0) = 0$.

9 Inverser deux intégrales



Le domaine est $D = \{0 \leq y \leq x \leq 1\}$; l'intégrande est continue et bornée sur ce compact, donc intégrable. Par Fubini,

$$I = \int_0^1 \cos(x^2) \left(\int_0^x dy \right) dx = \int_0^1 x \cos(x^2) dx = \left[\frac{1}{2} \sin(x^2) \right]_0^1 = \frac{\sin 1}{2}.$$

$\sin 1 \approx 0,8415$, donc $I \approx 0,421$.

10 Un triangle



$$\text{Par Fubini : } \int_0^1 \left(\int_0^y (x+y) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + y^2 \right) dy = \int_0^1 \frac{3y^2}{2} dy = \frac{1}{2}.$$

Vérification : sur le carré, $\iint (x+y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Les triangles $\{x \leq y\}$ et $\{x \geq y\}$ sont échangés par la symétrie $(x, y) \mapsto (y, x)$, qui laisse $x+y$ invariant : chacun contribue pour la moitié, soit $\frac{1}{2}$.

11 Gamma et substitutions



a. $\int_0^{+\infty} t^{3/2-1} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

b. Avec $t = u^2$, $du = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ et $u^4 = t^2$:

$$\int_0^{+\infty} u^4 e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{3/2} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}.$$

12 Quart de disque



En polaires, D devient $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $xy = r^2 \cos \theta \sin \theta$:

$$\iint_D xy = \int_0^1 r^3 dr \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

En cartésiennes : $\int_0^1 x \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x(1-x^2)}{2} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}$. Les deux méthodes concordent.

13 Quand la domination échoue



Si $x > 0$: $F(x) = [-e^{-xt}]_0^{+\infty} = 1$. Si $x = 0$: l'intégrande est nul, donc $F(0) = 0$. Ainsi F n'est pas continue en 0.

L'hypothèse de domination est en défaut : pour $t > 0$ fixé, $\sup_{x \geq 0} x e^{-xt}$ est atteint en $x = \frac{1}{t}$ et vaut $\frac{1}{et}$. Toute majorante g valable pour tous les x vérifie $g(t) \geq \frac{1}{et}$, non intégrable sur $]0, +\infty[$.

14 Espérance du minimum



$E[\min(X, Y)] = \iint_{[0,1]^2} \min(x, y) dx dy = 2 \int_0^1 \left(\int_0^y x dx \right) dy = 2 \int_0^1 \frac{y^2}{2} dy = \frac{1}{3}$ (par symétrie, la zone $x \leq y$ compte pour la moitié).

Comme $\min + \max = X + Y$, $E[\max] = E[X] + E[Y] - E[\min] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

15 Un contre-exemple à Fubini

★★★★

(a) On vérifie que $\frac{d}{dy} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = f(x, y)$. Donc

$$\int_0^1 f(x, y) dy = \frac{1}{x^2 + 1} \text{ et } \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

(b) $f(y, x) = -f(x, y)$, donc l'autre ordre donne $-\frac{\pi}{4}$.

(c) Si f était intégrable sur $]0, 1]^2$, le théorème de Fubini imposerait l'égalité des deux intégrales itérées. Elles sont différentes : f n'est pas intégrable sur le carré.

16 L'intégrale de Gauss

★★★★

Soit $G = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$, finie car $e^{-x^2} \leq e^{-|x|+1}$ pour tout x . Par Tonelli,

$G^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$. En polaires (jacobien r) :

$$G^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi. \text{ Comme } G > 0, G = \sqrt{\pi}.$$

Pour la seconde, $x = \sqrt{2}u$ donne $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \sqrt{2\pi}$.

17 Gamma : continuité et factorielle

★★★★

(a) Pour $t \in]0, 1]$ et $x \geq a$, $t^{x-1} \leq t^{a-1}$; pour $t \geq 1$ et $x \leq b$, $t^{x-1} \leq t^{b-1}$. Posons

$g(t) = t^{a-1}$ sur $]0, 1]$ et $g(t) = t^{b-1}e^{-t}$ sur $[1, +\infty[$. Alors $\int_0^1 t^{a-1} dt = \frac{1}{a} < +\infty$ et

$\int_1^{+\infty} t^{b-1}e^{-t} dt \leq \Gamma(b) < +\infty$. La fonction g est intégrable, $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue : Γ est continue sur $[a, b]$, donc sur $]0, +\infty[$.

(b) Intégration par parties : $\Gamma(x+1) = \left[-t^x e^{-t} \right]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$ (le crochet est nul car $x > 0$). Comme $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, une récurrence immédiate donne $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = \dots = n!$.

18 Une équation différentielle par dérivation

★★★★

(a) $\left| \frac{\partial}{\partial x} (e^{-t^2} \cos(xt)) \right| = |t e^{-t^2} \sin(xt)| \leq t e^{-t^2}$, intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc $F \in C^1$ et $F'(x) = - \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(xt) dt$.

(b) On pose $u = \sin(xt)$, $v' = t e^{-t^2}$, $v = -\frac{1}{2} e^{-t^2}$. Alors $\int_0^{+\infty} t e^{-t^2} \sin(xt) dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(xt) \right]_0^{+\infty} + \frac{x}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt) dt = \frac{x}{2} F(x)$. Donc $F'(x) = -\frac{x}{2} F(x)$.

(c) La solution de cette équation linéaire est $F(x) = F(0) e^{-x^2/4}$ avec $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$:
 $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2/4}$.

19 Volume d'une boule par tranches

★★★★

La boule est $B = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$. Par Tonelli, $\lambda_3(B) = \int_{-2}^2 \lambda_2(S_z) dz$, où la section S_z est le disque de rayon $\sqrt{4 - z^2}$, d'aire $\pi(4 - z^2)$.

$\lambda_3(B) = \pi \int_{-2}^2 (4 - z^2) dz = \pi \left[4z - \frac{z^3}{3} \right]_{-2}^2 = \pi \left(16 - \frac{16}{3} \right) = \frac{32\pi}{3}$, ce qui est bien $\frac{4}{3} \pi R^3$ pour $R = 2$.

20 La fonction Bêta

★★★★

(a) Directement : $B(2, 3) = \int_0^1 t(1-t)^2 dt = \int_0^1 (t - 2t^2 + t^3) dt = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

Par la formule : $\frac{\Gamma(2)\Gamma(3)}{\Gamma(5)} = \frac{1 \times 2}{24} = \frac{1}{12}$. Les deux valeurs coïncident.

(b) Par la formule : $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})^2}{\Gamma(1)} = \pi$. Directement, $t = \sin^2 \theta$, $dt = 2 \sin \theta \cos \theta d\theta$

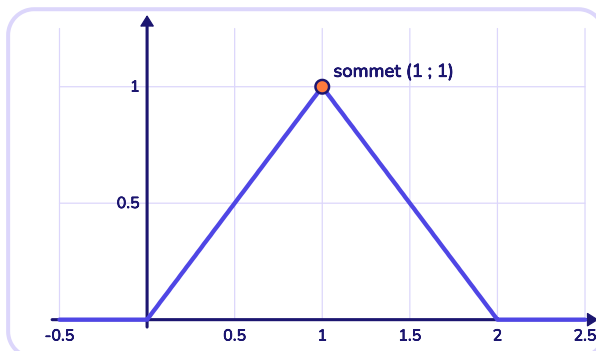
et $\sqrt{t(1-t)} = \sin \theta \cos \theta$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$: $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} 2 d\theta = \pi$.

21 Convolution de deux indicatrices

★★★

(a) $f(t)f(x-t) = 1$ si et seulement si $t \in [0, 1] \cap [x-1, x]$. Cet intervalle est de longueur x si $0 \leq x \leq 1$, de longueur $2-x$ si $1 \leq x \leq 2$, et vide sinon : $(f * f)(x) = x$ sur $[0, 1]$, $2-x$ sur $[1, 2]$, 0 ailleurs (graphe triangulaire).

(b) $f * f \geq 0$: par Tonelli, $\int (f * f)(x) dx = \int f(t) \left(\int f(x-t) dx \right) dt = \int f(t) \cdot 1 dt = 1$.
Vérification : l'aire du triangle de base 2 et de hauteur 1 vaut 1.



22 Une série d'intégrales

★★★

Pour $x \in]0, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$ et $-\ln x > 0$: tous les termes $x^n(-\ln x)$ sont positifs.

Le théorème de Tonelli (pour la mesure de comptage et la mesure de Lebesgue) permet

d'échanger somme et intégrale sans condition : $\int_0^1 \frac{-\ln x}{1-x} dx = \sum_{n \geq 0} \int_0^1 x^n (-\ln x) dx$.

Par intégration par parties ($u = -\ln x$, $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$) :

$$\int_0^1 x^n (-\ln x) dx = \left[-\frac{x^{n+1} \ln x}{n+1} \right]_0^1 + \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

$$n \geq 0 : \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 126 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices de maths

Intégrales à paramètres et Fubini :
exercices de maths Licence L3

QCM de maths

Intégrales à paramètres et Fubini : QCM
de maths Licence L3

Contrôles de maths

Intégrales à paramètres et Fubini :
contrôle de maths Licence L3

Exercices de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert :
exercices de maths Licence L3

 Exercices de maths

Séries de Fourier : exercices de maths
Licence L3

 QCM de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert : QCM
de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage