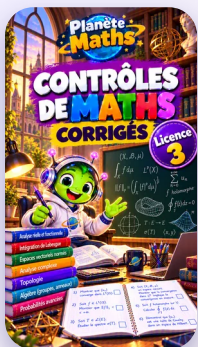


Intégrales à paramètres et Fubini : corrigé du contrôle de maths Licence L3 à télécharger en PDF



Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 52 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigé du contrôle avec le barème détaillé. Compte tes points et repère ce qu'il faut revoir.

Durée conseillée : 45 minutes. Barème sur 20 points. Calculatrice autorisée seulement quand l'énoncé le précise.

1

Fonction Gamma

/ 3 pts

(a) $\Gamma(5) = 4! = 24$. (1 pt)

(b) $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$. (1 pt)

(c) Avec $u = 2t$: $\int_0^{+\infty} t^4 e^{-2t} dt = \frac{\Gamma(5)}{2^5} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$. (1 pt)

2 Intégrale à paramètre

/ 4 pts

(a) Soit $M > 0$. Pour $x \in [-M, M]$ et $t \in [0, 1]$, $\setminus \{0\}$ (2 pts)

(b) $\frac{\partial}{\partial x} e^{xt} = te^{xt}$, majoré par e^M pour $x \in [-M, M]$, intégrable sur $[0, 1]$. Donc $G \in C^1$ et $G'(x) = \int_0^1 te^{xt} dt$. (1 pt) En particulier $G'(0) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$. (1 pt)

3 Inversion d'ordre

/ 3 pts

Le domaine est $\{0 \leq x \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq 1\} = \{0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 2y\}$; l'intégrande est continue sur ce compact. (1 pt)

Par Fubini, $I = \int_0^1 e^{y^2} \left(\int_0^{2y} dx \right) dy = \int_0^1 2y e^{y^2} dy$. (1 pt)

$I = [e^{y^2}]_0^1 = e - 1$. (1 pt)

4 Coordonnées polaires

/ 4 pts

(a) Passage en polaires avec $dx dy = r dr d\theta$: (1 pt) $\iint_{D_R} = \int_0^{2\pi} \int_0^R r e^{-r^2} dr d\theta$ (1 pt)
 $= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R = \pi(1 - e^{-R^2})$. (1 pt)

(b) Quand $R \rightarrow +\infty$, la limite vaut π ; par convergence monotone, c'est

$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right)^2$, d'où $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. (1 pt)

5 Probabilité par intégrale double

/ 3 pts

(a) La loi conjointe a pour densité 1 sur $[0, 1]^2$, donc

$P(X + Y \leq \frac{3}{2}) = \iint_{[0,1]^2} \mathbf{1}_{x+y \leq 3/2} dx dy$. (1 pt)

(b) Par Tonelli, pour x fixé, la longueur des $y \in [0, 1]$ avec $y \leq \frac{3}{2} - x$ vaut 1 si $x \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2} - x$ si $x \geq \frac{1}{2}$. (1 pt) Donc $P = \int_0^{1/2} dx + \int_{1/2}^1 (\frac{3}{2} - x) dx = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$. (1 pt)

6

Questions de cours

/ 3 pts

(a) Oui : c'est le théorème de Tonelli (positivité et mesurabilité suffisent, les valeurs $+\infty$ sont admises). **(1 pt)**

(b) Non : $\int_0^1 t^{-1} e^{-t} dt$ diverge, car l'intégrande est équivalent à $\frac{1}{t}$ en 0. **(1 pt)**

(c) Oui : pour $x > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$, continue sur $]0, +\infty[$; sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, la domination par e^{-at} le confirme aussi. **(1 pt)**

Le livre de contrôles corrigés de maths Licence L3

Tout le programme en un seul PDF de 52 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#) **Zyro te conseille la suite****Contrôles de maths**

Intégrales à paramètres et Fubini :
contrôle de maths Licence L3

**Cours de maths**

Intégrales à paramètres et Fubini : cours
de maths Licence L3

 QCM de maths

Intégrales à paramètres et Fubini : QCM
de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert :
contrôle de maths Licence L3

 Contrôles de maths

Séries de Fourier : contrôle de maths
Licence L3

 Cours de maths

Espaces L_p et espaces de Hilbert : cours
de maths Licence L3

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage