

Intégration sur un intervalle quelconque : exercices de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

21 exercices classés par difficulté (★ facile, ★★ moyen, ★★★ difficile). Cherche d'abord sans regarder le corrigé !

1 Trois intégrales de Riemann



Étudier la convergence des intégrales suivantes et calculer celles qui convergent :

a. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} ;$

b. $\int_0^1 \frac{dt}{t^{3/2}} ;$

c. $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}.$

2 Une exponentielle décroissante



Calculer $\int_0^{+\infty} 2e^{-t/4} dt$.

3 Intégrale de $t \ln t$



Montrer que $\int_0^1 t \ln t dt$ converge et la calculer (intégration par parties sur $[\epsilon, 1]$).

4 Vrai ou faux ?



Dire, en justifiant, si chaque affirmation est vraie ou fausse.

- a. Toute fonction continue sur $[0, +\infty[$ tendant vers 0 en $+\infty$ est intégrable.
- b. Si f est continue et intégrable sur $[0, +\infty[$, alors $\int_0^X f$ possède une limite finie quand $X \rightarrow +\infty$.
- c. Si $|f| \leq g$ et $\int g = +\infty$, alors f n'est pas intégrable.

5 Intégrale sur tout $\mathbb{R}$



Montrer que $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer son intégrale.

6 Valeurs de Gamma



Calculer $\Gamma(6)$ et $\Gamma(\frac{7}{2})$, sachant que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

7 Limite de $t^n/(1+t)$



Montrer que $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$ tend vers 0, de deux façons : par convergence dominée, puis par un encadrement.

8 Une intégrale par changement de variable



Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$ converge et la calculer avec $t = u^2$.

9 Une intégrale ramenée à Gamma



Calculer $\int_0^{+\infty} t^4 e^{-2t} dt$.

10 Intégration par parties à l'infini



Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt$ converge et la calculer.

11 Puissances d'une fonction décroissante



Pour $n \geq 1$, soit $J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$. Montrer que $J_n \rightarrow 0$.

12 Une série d'intégrales



Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1/t)}{1-t/2} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k(k+1)^2}$. On rappelle que $\int_0^1 t^k \ln \frac{1}{t} dt = \frac{1}{(k+1)^2}$.

13 Continuité d'une transformée



Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos(xt) dt$. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$, puis calculer $F(x)$ à l'aide de $\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} dt$.

14 Dérivée d'une intégrale à paramètre



Pour $x > 0$, soit $F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x+t}$. Calculer $F(x)$ directement puis $F'(x)$ par dérivation sous l'intégrale, et comparer.

15 Moments gaussiens



En utilisant $u = t^2$, calculer $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} t^4 e^{-t^2} dt$.

16 Le minimum de Gamma



Montrer que $\Gamma(x) < 1$ pour tout $x \in]1, 2[$ et qu'il existe un unique $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$.

17 Équivalent en 0



Montrer que $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow 0^+$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \Gamma(x)$ et la limite de Γ en 0^+ .

18 Transformée de Laplace de $\sin t / t$

★★★★

Pour $x > 0$, soit $L(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$ (on prolonge $\frac{\sin t}{t}$ par 1 en 0).

- Montrer que L est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $L'(x)$.
- Montrer que $L(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, puis en déduire $L(x)$.

19 Une limite en forme de $(1 - t/n)^n$

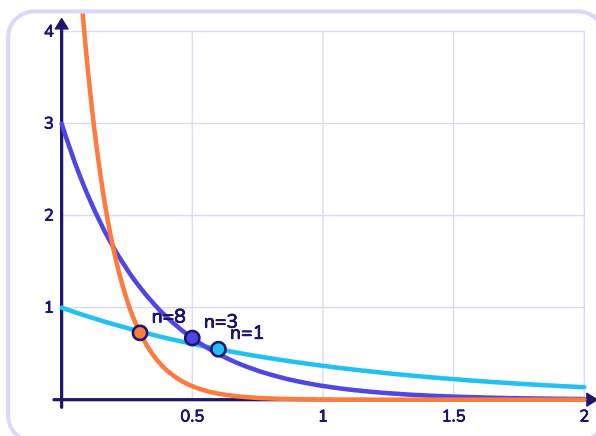
★★★★

On pose $f_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n$ pour $0 \leq t \leq n$ et $f_n(t) = 0$ pour $t > n$. Calculer $\int_0^{+\infty} f_n$, puis retrouver sa limite par convergence dominée (on admet $\ln(1 - u) \leq -u$ pour $u < 1$).

20 Un contre-exemple à la domination

★★★★

On reprend $f_n(t) = n e^{-nt}$ sur $]0, +\infty[$ (figure ci-dessous). Calculer $\int_0^{+\infty} f_n$, la limite simple de f_n , puis montrer qu'aucune fonction intégrable ne domine toute la suite.



21 Une intégrale définie par $\ln(1+x)$

★★★★

Pour $x \geq 0$, soit $F(x) = \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt$. Montrer que $F(x) = \ln(1 + x)$ en dérivant sous l'intégrale. On remarquera que $\frac{t^x - 1}{\ln t} = \int_0^x t^s ds$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Zyro te conseille la suite

Exercices corrigés de maths

Intégration sur un intervalle quelconque :
exercices corrigés de maths Maths Spé

Cours de maths

Intégration sur un intervalle quelconque :
cours de maths Maths Spé

QCM de maths

Intégration sur un intervalle quelconque :
QCM de maths Maths Spé

Exercices corrigés de maths

Topologie des espaces vectoriels normés
: exercices corrigés de maths Maths Spé

✓ **Exercices corrigés de maths**

Calcul différentiel : exercices corrigés de maths Maths Spé

■ **Cours de maths**

Topologie des espaces vectoriels normés : cours de maths Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage