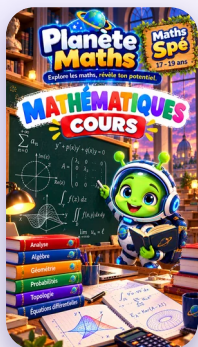


Intégration sur un intervalle quelconque : cours de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Jusqu'ici, l'intégrale de Riemann vivait sur un segment, pour des fonctions bornées. Or l'analyse réclame bien davantage : des fonctions qui explosent en un point, des intervalles qui s'étendent jusqu'à l'infini, des limites et des sommes infinies qu'on voudrait échanger avec le signe intégral, des fonctions définies elles-mêmes par une intégrale. Ce chapitre construit l'outil général, puis ses trois grands théorèmes, et se termine par la fonction Gamma.

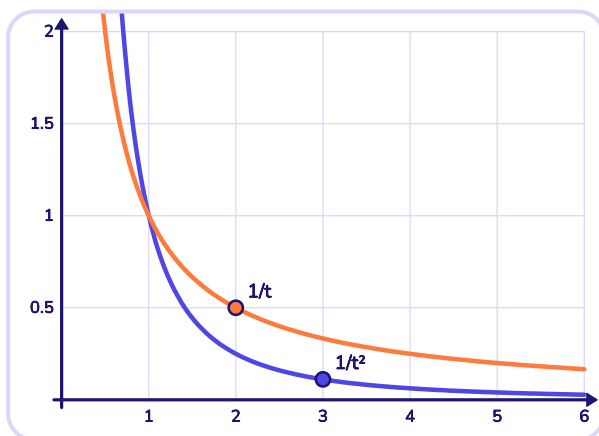
1. Fonctions intégrables sur un intervalle

D Fonction intégrable

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) continue par morceaux. On dit que f est **intégrable** sur I si $\int_I |f|$ est finie, c'est-à-dire si les intégrales de $|f|$ sur les segments contenus dans I restent bornées. On note alors $\int_I f$ son intégrale.

Les intégrales de référence, à connaître par cœur, sont réunies ci-dessous.

Fonction	Intervalle	Intégrable si et seulement si
$t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$	$[1, +\infty[$	$\alpha > 1$
$t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$	$]0, 1]$	$\alpha < 1$
$t \mapsto e^{-at}$	$[0, +\infty[$	$a > 0$
$t \mapsto \ln t$	$]0, 1]$	toujours ($\int_0^1 \ln t \, dt = -1$)



Sur la figure, la courbe orange ($1/t$) décroît trop lentement : l'aire sous elle croît comme $\ln X$ et n'est pas bornée. La courbe violette ($1/t^2$) décroît assez vite pour que l'aire totale sur $[1, +\infty[$

vaillie exactement 1.

2. Intégrales généralisées et comparaison

Si f est continue sur $[a, b[$ avec $b \leq +\infty$, l'intégrale $\int_a^b f$ est dite **convergente** lorsque $x \mapsto \int_a^x f$ possède une limite finie en b . Pour une fonction positive, convergence et intégrabilité sont équivalentes. Plus généralement, l'intégrabilité (la convergence absolue) entraîne la convergence ; la réciproque est fausse, comme le montre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$, convergente sans être absolument convergente.

P

Comparaison

Soit f et g continues par morceaux sur $[a, b[$, g positive et intégrable. Si $|f| \leq g$, ou si $f = O(g)$ ou $f = o(g)$ au voisinage de b , alors f est intégrable. Si f et g sont positives et équivalentes en b , elles sont simultanément intégrables ou non.

M

Étudier l'intégrabilité en pratique

1. Repérer les points « difficiles » : les bornes infinies et les points où la fonction n'est pas définie ou bornée ; découper l'intervalle pour n'avoir qu'un problème par morceau.
2. En chaque point difficile, chercher un équivalent simple (puissance de t , exponentielle).
3. Conclure par comparaison avec une intégrale de référence, puis recoller les morceaux.



Exemple 1 : nature d'une intégrale

Soit $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)}$ sur $]0, +\infty[$. Au voisinage de 0 , $f(t) \sim t^{-1/2}$ avec $\frac{1}{2} < 1$: intégrable. Au voisinage de $+\infty$, $f(t) \sim t^{-5/2}$ avec $\frac{5}{2} > 1$: intégrable. Donc f est intégrable sur $]0, +\infty[$.



Exemple 2 : un calcul à la borne

Pour $0 < \varepsilon < 1$, une primitive de $\ln$ est $t \ln t - t$, donc $\int_{\varepsilon}^1 \ln t \, dt = -1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon$.

Comme $\varepsilon \ln \varepsilon \rightarrow 0$, on obtient $\int_0^1 \ln t \, dt = -1$.



Erreur classique

Une fonction continue qui tend vers 0 en $+\infty$ n'est pas forcément intégrable :

$t \mapsto \frac{1}{1+t}$ en est le contre-exemple. Inversement, une fonction intégrable ne tend pas forcément vers 0 .

3. Le théorème de convergence dominée

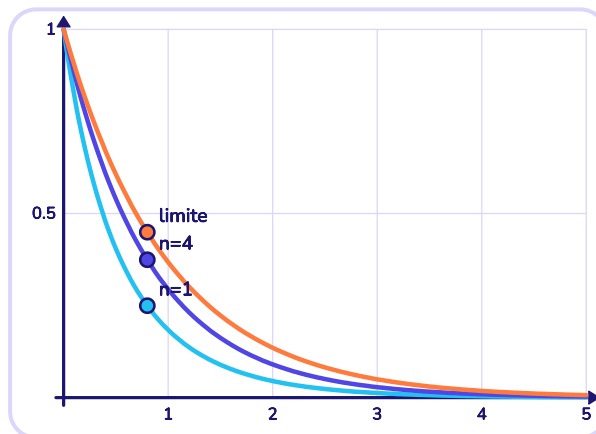
P

Convergence dominée

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux sur I . On suppose : (i) f_n converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux ; (ii) il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I , telle que $|f_n| \leq \varphi$ pour tout n . Alors f est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \int_I f.$$

L'idée est que la fonction φ , indépendante de n , empêche la masse de « s'échapper » vers l'infini ou de se concentrer en un point.



E

Exemple 3 : une limite d'intégrales

Soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+t/n} dt$. Pour tout $t \geq 0$, $f_n(t) = \frac{e^{-t}}{1+t/n} \rightarrow e^{-t}$. De plus $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}$, fonction intégrable sur $[0, +\infty[$. Le théorème donne $I_n \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.



La domination est indispensable

Avec $f_n(t) = n e^{-nt}$, chaque intégrale sur $[0, +\infty[$ vaut 1, alors que $f_n(t) \rightarrow 0$ pour tout $t > 0$: la limite des intégrales (1) diffère de l'intégrale de la limite (0). Aucune fonction φ intégrable ne domine toute la suite (voir les exercices).

4. Intégration terme à terme



Intégration terme à terme

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I telle que $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux et que la série $\sum \int_I |f_n|$ converge. Alors S est intégrable et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$$

Lorsque les f_n sont positives, l'égalité reste vraie dans $[0, +\infty[$.



Exemple 4 : somme d'une série par une intégrale

Pour $t \geq 0$, $\frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-(k+1)t}}{2^k}$, série de fonctions positives avec $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(k+1)t}}{2^k} dt = \frac{1}{2^k(k+1)}$. Avec le changement de variable $u = e^{-t}$, le membre de gauche s'intègre en $\int_0^1 \frac{du}{1-u/2} = -2 \ln \frac{1}{2} = 2 \ln 2$. Donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k(k+1)} = 2 \ln 2.$$

5. Intégrales à paramètre : continuité

Soit A un intervalle, I un intervalle et $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$. On étudie $F(x) = \int_I f(x, t) dt$.

P Continuité sous l'intégrale

On suppose : (i) pour tout t , $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A ; (ii) pour tout x , $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux ; (iii) il existe φ intégrable sur I avec $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $(x, t) \in A \times I$. Alors F est définie et continue sur A .

La continuité étant une propriété locale, il suffit de vérifier la domination sur tout *segment* de A , ce qui rend la méthode beaucoup plus souple.

E Exemple 5 : continuité en 0

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ pour $x \geq 0$. Pour tout $x \geq 0$ et tout $t \geq 0$,
 $\left| \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$, intégrable sur $[0, +\infty[$. Donc F est continue sur $[0, +\infty[$, y compris en 0, et $F(0) = \frac{\pi}{2}$.

6. Dérivation sous l'intégrale

P Dérivation sous l'intégrale (classe C^1)

On suppose : (i) pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur I ; (ii) pour tout t , $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur A ; (iii) pour tout x , $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux ; (iv) il existe φ intégrable sur I avec $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$ sur $A \times I$ (ou sur tout segment de A). Alors F est de classe C^1 et $F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

En itérant, on obtient la classe C^k , puis C^∞ , pourvu que chaque dérivée partielle soit dominée.

E Exemple 6 : les intégrales $\int t^n e^{-xt}$

Pour $x > 0$, $L(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$. Sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, $|t^k e^{-xt}| \leq t^k e^{-at}$, intégrable : on peut dériver autant de fois qu'on veut. On obtient $L^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, donc $\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}$.



Dominer sur un segment, pas sur tout l'intervalle

Ici $\sup_{x>0} t e^{-xt} = t$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$: la domination globale échoue. C'est la domination sur $[a, +\infty[$, pour tout $a > 0$, qui sauve la démonstration.

7. La fonction Gamma



Fonction Gamma d'Euler

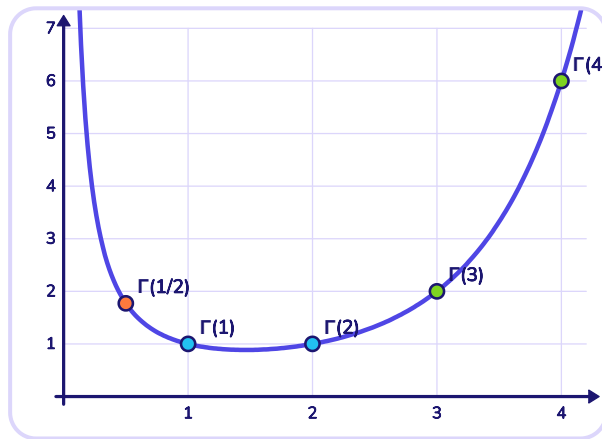
Pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

L'intégrale converge : en 0, $t^{x-1} e^{-t} \sim t^{x-1}$ avec $1 - x < 1$; en $+\infty$, $t^{x-1} e^{-t} = o(1/t^2)$.

P

Propriétés de Γ

- Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et $\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t} dt$; en particulier $\Gamma'' > 0$: Γ est strictement convexe.
- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$, et $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (on admet $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).
- $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow 0^+$.



La relation fonctionnelle vient d'une intégration par parties :

$\int_\varepsilon^A t^x e^{-t} dt = [-t^x e^{-t}]_\varepsilon^A + x \int_\varepsilon^A t^{x-1} e^{-t} dt$, et les termes tout intégrés tendent vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et $A \rightarrow +\infty$. Avec $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, la récurrence donne les factorielles. Enfin, $\Gamma(x) = \Gamma(x+1)/x$ et la continuité de Γ en 1 donnent l'équivalent en 0.

E

Exemple 7 : intégrales ramenées à Gamma

$$\int_0^{+\infty} t^{3/2} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}. \text{ De même, avec } u = t^2,$$

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$



Le conseil de Zyro

Face à une intégrale de la forme « puissance fois exponentielle », pense Gamma : un changement de variable linéaire ($u = at$) ou quadratique ($u = t^2$) la ramène presque toujours à Γ en une ligne.

À retenir

- f est intégrable sur I si $\int_I |f|$ est finie ; références : $\frac{1}{t^\alpha}$ intégrable en $+\infty$ ssi $\alpha > 1$, en 0 ssi $\alpha < 1$, et e^{-at} en $+\infty$ si $a > 0$.
- On étudie l'intégrabilité par comparaison, équivalents et découpage de l'intervalle.
- Convergence dominée : convergence simple plus une domination $|f_n| \leq \varphi$ intégrable et indépendante de n .
- Intégration terme à terme : valable si $\sum \int |f_n|$ converge, ou pour des termes positifs.
- Continuité et dérivation sous $\int$: continuité de la dépendance en x et domination, vérifiée sur tout segment ; $F' = \int \partial_x f$.
- $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $\Gamma(n+1) = n!$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, Γ strictement convexe de classe C^∞ .

Le livre de cours de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 103 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 Zyro te conseille la suite

 Exercices de maths

Intégration sur un intervalle quelconque :
exercices de maths Maths Spé

 Contrôles de maths

Intégration sur un intervalle quelconque :
contrôle de maths Maths Spé

 QCM de maths

Intégration sur un intervalle quelconque :
QCM de maths Maths Spé

 Exercices de maths

Topologie des espaces vectoriels normés
: exercices de maths Maths Spé

 Exercices de maths

 Contrôles de maths

Calcul différentiel : exercices de maths
Maths Spé

Topologie des espaces vectoriels normés
: contrôle de maths Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage