

Intégration sur un intervalle quelconque : exercices corrigés de maths Maths Spé à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Trois intégrales de Riemann



a. Ici $\alpha = \frac{3}{2} > 1$: convergence. $\int_1^X t^{-3/2} dt = 2 - 2X^{-1/2} \rightarrow 2$. La valeur est 2.

b. $\alpha = \frac{3}{2} \geq 1$ en 0 : divergence, car $\int_\varepsilon^1 t^{-3/2} dt = 2\varepsilon^{-1/2} - 2 \rightarrow +\infty$.

c. $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ en $+\infty$: divergence, car $\int_1^X t^{-1/2} dt = 2\sqrt{X} - 2 \rightarrow +\infty$.

2 Une exponentielle décroissante



Pour $X > 0$, $\int_0^X 2e^{-t/4} dt = [-8e^{-t/4}]_0^X = 8(1 - e^{-X/4})$. Quand $X \rightarrow +\infty$, $e^{-X/4} \rightarrow 0$. L'intégrale converge et vaut 8.

3 Intégrale de $t \ln t$



Avec $u = \ln t$, $v' = t$: $\int_{\varepsilon}^1 t \ln t \, dt = \left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{t}{2} \, dt = -\frac{\varepsilon^2}{2} \ln \varepsilon - \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}$.

Comme $\varepsilon^2 \ln \varepsilon \rightarrow 0$, la limite existe : $\int_0^1 t \ln t \, dt = -\frac{1}{4}$.

4 Vrai ou faux ?



a. Faux : $f(t) = \frac{1}{1+t}$ tend vers 0 mais $\int_0^X \frac{dt}{1+t} = \ln(1+X) \rightarrow +\infty$.

b. Vrai : l'intégrabilité entraîne la convergence (la convergence absolue implique la convergence).

c. Faux : avec $f = 0$ et $g(t) = \frac{1}{t}$ sur $[1, +\infty[$, on a $|f| \leq g$, $\int g = +\infty$ et pourtant f est intégrable. La comparaison ne fonctionne que dans le sens « dominée par une intégrable ».

5 Intégrale sur tout $\mathbb{R}$



La fonction est continue, positive, et $\frac{1}{1+t^2} \sim \frac{1}{t^2}$ en $\pm\infty$ (intégrable). Une primitive est **arctan**, donc $\int_{-X}^X \frac{dt}{1+t^2} = 2 \arctan X \rightarrow 2 \cdot \frac{\pi}{2}$. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$.

6 Valeurs de Gamma



$\Gamma(6) = 5! = 120$.

Par la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$: $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8} \sqrt{\pi} \approx 3,32$.

7 Limite de $t^n/(1+t)$



Domination. On intègre sur $[0, 1[$ (le point 1 ne change pas l'intégrale) : pour tout $t \in [0, 1[$, $\frac{t^n}{1+t} \rightarrow 0$. De plus $0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq 1$, intégrable sur $[0, 1[$. Donc $u_n \rightarrow 0$.

Encadrement. $0 \leq u_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$.

8 Une intégrale par changement de variable



En 0, l'intégrande est équivalent à $t^{-1/2}$ (intégrable) ; en $+\infty$, à $t^{-3/2}$ (intégrable) : l'intégrale converge.

$$\text{Avec } t = u^2, dt = 2u du : \int_0^{+\infty} \frac{2u du}{u(1+u^2)} = 2 \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.$$

9 Une intégrale ramenée à Gamma



$$\text{Posons } u = 2t, dt = \frac{du}{2} : \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{2}\right)^4 e^{-u} \frac{du}{2} = \frac{1}{2^5} \Gamma(5) = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}.$$

10 Intégration par parties à l'infini



$$\text{Avec } u = \ln t, v' = t^{-2}, v = -\frac{1}{t} : \int_1^X \frac{\ln t}{t^2} dt = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^X + \int_1^X \frac{dt}{t^2} = -\frac{\ln X}{X} + 1 - \frac{1}{X}.$$

Par croissances comparées, la limite en $+\infty$ est 1 : l'intégrale converge et vaut 1.

11 Puissances d'une fonction décroissante



Posons $f_n(t) = (1+t^2)^{-n}$. On intègre sur $]0, +\infty[$ (le point 0 ne change pas l'intégrale). Pour $t > 0$, $0 < \frac{1}{1+t^2} < 1$, donc $f_n(t) \rightarrow 0$. De plus $0 \leq f_n \leq f_1$, avec f_1 intégrable sur $[0, +\infty[$. Par convergence dominée, $J_n \rightarrow 0$.

12 Une série d'intégrales



Pour $t \in]0, 1]$, $\frac{1}{1-t/2} = \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{2^k}$, donc l'intégrande vaut $\sum_k f_k(t)$ avec $f_k(t) = \frac{t^k}{2^k} \ln \frac{1}{t} \geq 0$.

Les termes sont positifs : on intègre terme à terme (cas positif). Chaque terme donne $\frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{(k+1)^2}$, et la série converge (majorée par $\sum 2^{-k}$). D'où l'égalité, de valeur $\approx 1,164$.

13 Continuité d'une transformée



Continuité. $x \mapsto e^{-t} \cos(xt)$ est continue, et $|e^{-t} \cos(xt)| \leq e^{-t}$, intégrable sur $[0, +\infty[$ et indépendante de x . Donc F est continue sur $\mathbb{R}$.

Calcul. $\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t} dt = \frac{1}{1-ix} = \frac{1+ix}{1+x^2}$ (car $\operatorname{Re}(ix-1) < 0$). En prenant la partie réelle, $F(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

14 Dérivée d'une intégrale à paramètre



Directement, $F(x) = \ln(x+1) - \ln x$, donc $F'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x(x+1)}$.

Sous l'intégrale : $\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{x+t} = -\frac{1}{(x+t)^2}$, continue et dominée sur $[a, +\infty[\times [0, 1]$ par $\frac{1}{a^2}$ ($a > 0$). Alors $F'(x) = -\int_0^1 \frac{dt}{(x+t)^2} = -\left[-\frac{1}{x+t}\right]_0^1 = -\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = -\frac{1}{x(x+1)}$. Les deux résultats coïncident.

15 Moments gaussiens



Pour $k \in \mathbb{N}$, avec $u = t^2$, $dt = \frac{du}{2\sqrt{u}}$:

$$\int_0^{+\infty} t^{2k} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{k-1/2} e^{-u} du = \frac{1}{2} \Gamma(k + \frac{1}{2}).$$

Pour $k = 1$: $\frac{1}{2} \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$. Pour $k = 2$: $\frac{1}{2} \Gamma(\frac{5}{2}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{4} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}$.

16 Le minimum de Gamma

★★★★

$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt > 0$: Γ est strictement convexe. Comme $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, le graphe sur $]1, 2[$ est strictement sous la corde horizontale, donc $\Gamma(x) < 1$.

Par le théorème de Rolle sur $[1, 2]$, il existe c avec $\Gamma'(c) = 0$. Comme Γ' est strictement croissante ($\Gamma'' > 0$), ce c est unique. Numériquement, $c \approx 1,46$ et $\Gamma(c) \approx 0,886$.

17 Équivalent en 0

★★★★

Pour $x > 0$, $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$. Comme Γ est continue en 1, $\Gamma(x+1) \rightarrow \Gamma(1) = 1$ quand $x \rightarrow 0^+$.

Donc $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1) \rightarrow 1$, c'est-à-dire $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$, et $\Gamma(x) \rightarrow +\infty$ en 0^+ .

18 Transformée de Laplace de $\sin t / t$

★★★★

a. $\left| \frac{\sin t}{t} \right| \leq 1$, donc l'intégrande est intégrable. La dérivée partielle est $-e^{-xt} \sin t$, dominée sur $[a, +\infty[$ ($a > 0$) par e^{-at} . Donc L est C^1 et

$$L'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t \, dt = -\operatorname{Im} \frac{1}{x-i} = -\operatorname{Im} \frac{x+i}{x^2+1} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

b. Pour $x \geq 1$, $\left| e^{-xt} \frac{\sin t}{t} \right| \leq e^{-t}$ et la fonction tend vers 0 pour tout $t > 0$: par convergence dominée, $L(x) \rightarrow 0$. Or $L(x) = C - \arctan x$, donc $0 = C - \frac{\pi}{2}$ et $L(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x$.

19 Une limite en forme de $(1 - t/n)^n$

★★★★

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \left[-\frac{n}{n+1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n+1} \right]_0^n = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1.$$

Domination : $\ln f_n(t) = n \ln(1 - \frac{t}{n}) \leq -t$, donc $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}$, intégrable.

Convergence simple : $f_n(t) \rightarrow e^{-t}$. Le théorème donne $\int f_n \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$, ce qui est bien la limite de $\frac{n}{n+1}$.

20 Un contre-exemple à la domination

★★★

$\int_0^{+\infty} ne^{-nt} dt = 1$ pour tout n , et $f_n(t) \rightarrow 0$ pour tout $t > 0$: l'intégrale de la limite est $0 \neq 1$.

Si φ dominait tous les f_n , on aurait $\varphi(t) \geq \sup_n f_n(t)$. Pour $t \in]0, 1]$, prenons $n = \lfloor 1/t \rfloor \geq 1$: $nt \leq 1$, donc $f_n(t) \geq ne^{-1} \geq \frac{1/t-1}{e}$. Or $\int_0^1 (\frac{1}{t} - 1) dt$ diverge : φ ne peut pas être intégrable.

21 Une intégrale définie par $\ln(1+x)$

★★★

Pour $t \in]0, 1[$, $\int_0^x t^s ds = \frac{t^x - 1}{\ln t}$, donc $0 \leq \frac{t^x - 1}{\ln t} \leq x$: l'intégrande est bornée donc intégrable sur $]0, 1[$, et $F(0) = 0$.

Sa dérivée partielle en x est t^x , continue en x , avec $0 \leq t^x \leq 1$: domination par la constante 1, intégrable sur $[0, 1]$. Donc $F'(x) = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{1+x}$, et comme $F(0) = 0$, on conclut $F(x) = \ln(1+x)$.

Le livre d'exercices corrigés de maths Maths Spé

Tout le programme en un seul PDF de 133 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre

 **Zyro te conseille la suite**

 Exercices de maths

Intégration sur un intervalle quelconque :
exercices de maths Maths Spé

 QCM de maths

Intégration sur un intervalle quelconque :
QCM de maths Maths Spé

 Contrôles de maths

Intégration sur un intervalle quelconque :
contrôle de maths Maths Spé

 Exercices de maths

Topologie des espaces vectoriels normés
: exercices de maths Maths Spé

 Exercices de maths

Calcul différentiel : exercices de maths
Maths Spé

 QCM de maths

Topologie des espaces vectoriels normés
: QCM de maths Maths Spé

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage