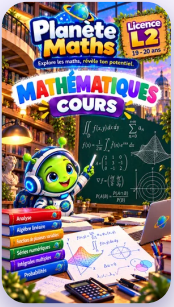


Intégrales doubles et triples : cours de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Une intégrale simple mesure l'aire sous une courbe. Les intégrales multiples prolongent cette idée : une intégrale double mesure un volume sous une surface, une intégrale triple accumule une quantité (masse, charge, volume) dans une région de l'espace. Le calcul se ramène presque toujours à des intégrales simples emboîtées, à condition de bien décrire le domaine et, souvent, de choisir un système de coordonnées adapté.

1. Intégrale double sur un rectangle

D Définition

Soit $R = [a, b] \times [c, d]$ et $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On découpe R en petits rectangles R_{ij} d'aire ΔA_{ij} , et on choisit un point (x_i, y_j) dans chacun. L'intégrale double est la limite des sommes de Riemann :

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \lim \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \Delta A_{ij},$$

lorsque le pas du découpage tend vers 0. Elle existe pour toute fonction continue sur R .

Si $f \geq 0$, cette intégrale est le volume du solide situé sous la surface $z = f(x, y)$ et au-dessus de R . Elle est linéaire, croissante, et vérifie la relation de Chasles par rapport au domaine : si $D = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 \cap D_2$ d'aire nulle, alors $\iint_D f \, dx \, dy = \iint_{D_1} f \, dx \, dy + \iint_{D_2} f \, dx \, dy$. En particulier $\iint_D 1 \, dx \, dy$ est l'aire de D .

2. Théorème de Fubini

P

Théorème de Fubini (cas continu)

Si f est continue sur $R = [a, b] \times [c, d]$, alors

$$\iint_R f \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

On peut donc intégrer dans l'ordre que l'on veut.

Le principe : on fixe x , on calcule l'aire de la coupe $y \mapsto f(x, y)$, puis on additionne ces aires de coupes le long de l'axe x . Un cas particulier utile : si $f(x, y) = g(x)h(y)$, l'intégrale sur un rectangle est le produit $\int_a^b g \times \int_c^d h$.

E

Exemple 1

Calculons $I = \iint_{[0,2] \times [1,3]} x y^2 \, dx \, dy$. La fonction est un produit :

$$I = \int_0^2 x \, dx \times \int_1^3 y^2 \, dy = 2 \times \frac{27 - 1}{3} = \frac{52}{3}.$$

3. Domaines élémentaires

Pour un domaine qui n'est pas un rectangle, on le décrit par ses bornes. Un domaine *simple selon y* s'écrit $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ avec $\varphi_1 \leq \varphi_2$ continues ; alors

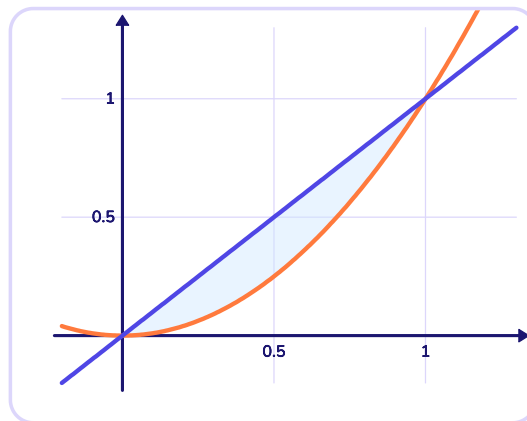
$$\iint_D f \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

La borne intérieure dépend de la variable extérieure ; la borne extérieure est une constante.

M

Méthode : calculer sur un domaine

1. Dessiner le domaine et repérer ses courbes frontières.
2. Choisir la variable extérieure ; tracer une droite parallèle à l'autre axe qui traverse le domaine : elle entre et sort sur deux courbes, qui donnent les bornes intérieures.
3. Lire les bornes extérieures (valeurs extrêmes de la variable extérieure).
4. Intégrer d'abord l'intégrale intérieure, puis l'extérieure ; si l'intégrale est inabordable, essayer l'autre ordre.



E

Exemple 2

Soit D le domaine limité par $y = x^2$ et $y = x$ (figure). Les courbes se coupent en $x = 0$ et $x = 1$, avec $x^2 \leq y \leq x$ entre les deux. Alors

$$\iint_D (x + y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^x dx = \int_0^1 \left(\frac{3x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$$

L'aire de D vaut $\int_0^1 (x - x^2) \, dx = \frac{1}{6}$.



Attention

Les bornes de l'intégrale extérieure ne peuvent jamais dépendre d'une variable : un résultat final contenant encore x ou y trahit une erreur de bornes. Pensez aussi à échanger l'ordre quand une primitive est introuvable, par exemple pour $\int e^{x^2} dx$.

4. Changement de variables



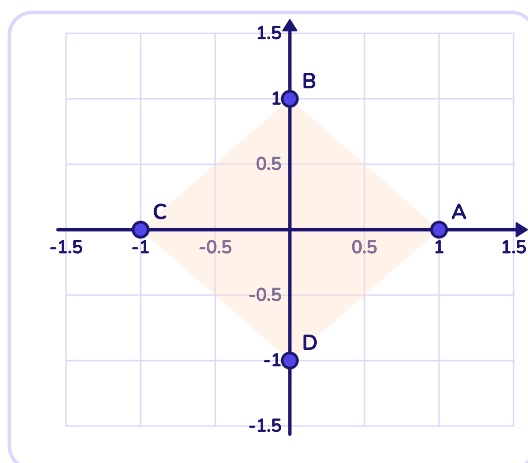
Formule du changement de variables

Soit $\Phi : (u, v) \mapsto (x, y) = (X(u, v), Y(u, v))$ de classe C^1 , bijective d'un ouvert Δ sur un ouvert D , de jacobien non nul. Alors

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_\Delta f(X(u, v), Y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{vmatrix}.$$

Le jacobien mesure la façon dont Φ dilate localement les aires : un petit rectangle $du dv$ devient un parallélogramme d'aire $|J| du dv$. On prend toujours la **valeur absolue** du déterminant. Quand on connaît plutôt (u, v) en fonction de (x, y) , on calcule le jacobien de l'inverse, puis on prend son inverse :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1}.$$



E

Exemple 3

Calculons l'aire du losange $D = \{|x| + |y| \leq 1\}$. Posons $u = x + y$ et $v = x - y$. Alors D correspond à $\Delta = [-1, 1]^2$. Comme $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$, on a $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{2}$, et

$$\iint_D dx dy = \iint_{[-1, 1]^2} \frac{1}{2} du dv = \frac{1}{2} \times 4 = 2.$$

5. Coordonnées polaires

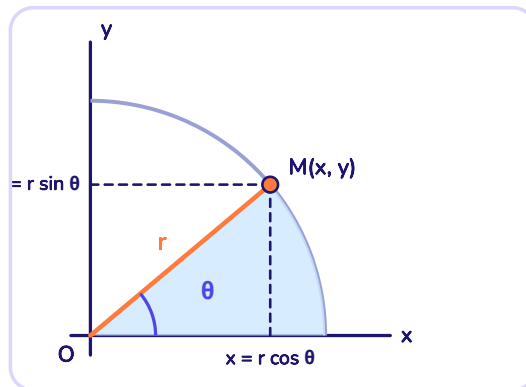
Pour un domaine circulaire (disque, couronne, secteur), on pose $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ avec $r \geq 0$. Le jacobien vaut $\begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$.

P

Formule polaire

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Pour un disque de centre O et de rayon R , $\Delta = [0, R] \times [0, 2\pi]$.



E

Exemple 4

Pour $D = \{x^2 + y^2 \leq R^2\}$:

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R = \pi (1 - e^{-R^2}).$$

En faisant tendre R vers l'infini, on obtient π , d'où l'intégrale de Gauss $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.



Attention

N'oubliez jamais le facteur r : c'est lui qui fait de $r dr d\theta$ un élément d'aire. Sans lui, l'aire d'un disque de rayon R vaudrait $2\pi R$ au lieu de πR^2 .

6. Intégrale triple

Pour f continue sur un pavé $P = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$, l'intégrale triple est la limite de sommes de Riemann sur des petits pavés ; le théorème de Fubini donne

$$\iiint_P f dx dy dz = \int_a^b \int_c^d \int_e^g f(x, y, z) dz dy dx,$$

l'ordre étant libre. Pour un solide V délimité par des surfaces, on procède par **piles** (on intègre d'abord en z entre deux surfaces, au-dessus d'un domaine D du plan Oxy) ou par **tranches** (on fixe z et on intègre sur la section S_z) :

$$\iiint_V f dV = \iint_D \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f dz \right) dx dy = \int_{z_1}^{z_2} \left(\iint_{S_z} f dx dy \right) dz.$$

Le volume de V est $\iiint_V dV$; la masse d'un solide de densité μ est $\iiint_V \mu dV$.

E

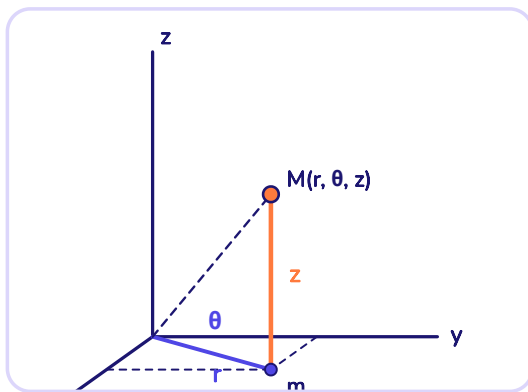
Exemple 5

Soit le tétraèdre $T = \{x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$. À z fixé, la section est un triangle rectangle de côté $1 - z$, d'aire $\frac{(1 - z)^2}{2}$. Donc

$$\text{Vol}(T) = \int_0^1 \frac{(1 - z)^2}{2} dz = \frac{1}{6}, \quad \iiint_T z dV = \int_0^1 z \frac{(1 - z)^2}{2} dz = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) =$$

7. Coordonnées cylindriques et sphériques

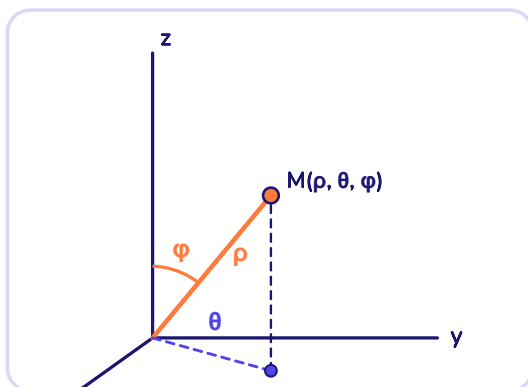
Cylindriques. On garde z et on passe en polaire dans le plan : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$. Le jacobien vaut r . Elles conviennent aux solides de révolution autour de Oz (cylindres, cônes, paraboloides).



Sphériques. On repère M par $\rho = OM \geq 0$, l'angle $\varphi \in [0, \pi]$ entre $\vec{Oz}$ et $\vec{OM}$, et l'angle $\theta \in [0, 2\pi[$ de la projection dans le plan Oxy :

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi, \quad \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} \right| = \rho^2 \sin \varphi.$$

Elles conviennent aux boules, sphères et cônes d'axe Oz .



P

Récapitulatif

Système	Changement de variables	É
Cartésien	(x, y) ou (x, y, z)	
Polaire (plan)	$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$	
Cylindrique	$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$	
Sphérique	$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, y = \rho \sin \varphi \sin \theta, z = \rho \cos \varphi$	$\rho^2 \sin \varphi$

E

Exemple 6

Volume d'une boule de rayon R en sphériques, avec $\rho \in [0, R]$, $\varphi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho = 2\pi \times 2 \times \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

!

Zyro

Sur ma planète, on choisit toujours les coordonnées avant de calculer : si l'équation du domaine contient $x^2 + y^2$, je passe en polaires ou cylindriques ; si elle contient $x^2 + y^2 + z^2$, je pars en sphériques.

8. Calculs d'aires et de volumes

- Aire d'un domaine plan : $\mathcal{A}(D) = \iint_D dx dy$; en polaires, $\mathcal{A} = \iint r dr d\theta$.
- Volume sous une surface : $V = \iint_D f(x, y) dx dy$ si $f \geq 0$ sur D ; entre deux surfaces, on intègre la différence $\psi_2 - \psi_1$.

- Volume d'un solide : $V = \iiint_V dV$, dans le système de coordonnées le plus adapté.
- Valeur moyenne de f sur V : $\frac{1}{\text{Vol}(V)} \iiint_V f dV$; centre de masse d'abscisse $\bar{x} = \frac{1}{m} \iiint x \mu dV$.

E

Exemple 7

Volume du solide compris entre le plan $z = 0$ et le paraboloïde $z = 9 - x^2 - y^2$ (au-dessus de $z = 0$). La trace au sol est le disque $r \leq 3$. En cylindriques :

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^3 (9 - r^2) r dr d\theta = 2\pi \left[\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^3 = 2\pi \times \frac{81}{4} = \frac{81\pi}{2}.$$

À retenir

- Fubini : pour f continue, une intégrale multiple se calcule par intégrales simples emboîtées, dans l'ordre le plus commode.
- Sur un domaine non rectangulaire, les bornes intérieures dépendent de la variable extérieure ; on commence par un dessin.
- Changement de variables : on multiplie par la valeur absolue du jacobien.
- Polaires : $r dr d\theta$; cylindriques : $r dr d\theta dz$; sphériques : $\rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$.
- Aire = $\iint 1$, volume = $\iiint 1$; disque πR^2 , boule $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Le livre de cours de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 100 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Intégrales doubles et triples : exercices de maths Licence L2



Contrôles de maths

Intégrales doubles et triples : contrôle de maths Licence L2



QCM de maths

Intégrales doubles et triples : QCM de maths Licence L2



Exercices de maths

Équations différentielles : exercices de maths Licence L2

 Exercices de maths

Probabilités sur un univers dénombrable :
exercices de maths Licence L2

 Contrôles de maths

Équations différentielles : contrôle de maths
Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage