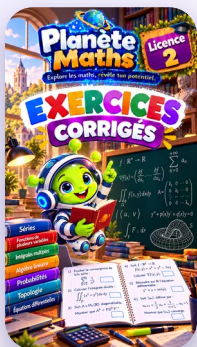


Intégrales doubles et triples : exercices corrigés de maths Licence L2 à télécharger en PDF



Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

[Voir le livre](#)

Corrigés rédigés des exercices du chapitre. Vérifie chaque étape, puis corrige-toi.

1 Un rectangle et une somme



La fonction est continue, on applique Fubini. D'abord en y : $\int_1^2 (2x + y) dy = 2x + \frac{3}{2}$. Puis en x : $\int_0^3 \left(2x + \frac{3}{2} \right) dx = 9 + \frac{9}{2} = \frac{27}{2}$.

Réponse : $\frac{27}{2}$.

2 Produit de sinus et cosinus



La fonction est un produit $g(x)h(y)$ sur un rectangle : $\int_0^\pi \sin x dx = 2$ et $\int_0^{\pi/2} \cos y dy = 1$.

Réponse : 2.

3 Un triangle



D est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$. Intégrons en y d'abord :

$$\int_0^x xy \, dy = x \cdot \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{2}. \text{ Puis } \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx = \frac{16}{8} = 2.$$

Réponse : 2.

4 Aire sous une parabole



Les courbes se coupent en $x = \pm 2$ et $x^2 \leq y \leq 4$. Aire

$$= \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = 2 \left(8 - \frac{8}{3} \right) = \frac{32}{3}.$$

Réponse : $\frac{32}{3}$ unités d'aire.

5 Vrai ou faux ?



a. **Vrai.** C'est le produit $\int_{-1}^1 x \, dx \times \int_{-1}^1 y \, dy = 0 \times 0 = 0$.

b. **Faux.** $\iint (x + y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, dont le carré vaut 1. Mais

$$\iint (x^2 + 2xy + y^2) = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{6} \neq 1.$$

6 Deux calculs en polaires



a. $\int_0^{2\pi} \int_0^3 r \, dr \, d\theta = 2\pi \times \frac{9}{2} = 9\pi$.

b. $x^2 + y^2 = r^2$, donc $\int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2 \cdot r \, dr \, d\theta = 2\pi \times \frac{16}{4} = 8\pi$.

7 Une somme sur un pavé



Par linéarité, chaque terme est intégré sur le pavé de volume $1 \times 2 \times 3 = 6$:

$$\iiint x = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot 3) = 3 ; \iiint y = 2 \cdot (1 \cdot 3) = 6 ; \iiint z = \frac{9}{2} \cdot (1 \cdot 2) = 9.$$

Réponse : $3 + 6 + 9 = 18$.

8 Entre deux courbes



Sur $[0, 1]$, $x^2 \leq \sqrt{x}$. Donc $\int_{x^2}^{\sqrt{x}} y \, dy = \frac{x - x^4}{2}$. Puis

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (x - x^4) \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{20}.$$

Réponse : $\frac{3}{20}$.

9 Échanger l'ordre



La fonction $x \mapsto e^{x^2}$ n'a pas de primitive exprimable avec les fonctions usuelles. Le domaine est $\{0 \leq y \leq x \leq 1\}$, que l'on décrit aussi par $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$. Alors

$$I = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2} \, dy \, dx = \int_0^1 x e^{x^2} \, dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{e - 1}{2}.$$

Réponse : $\frac{e - 1}{2}$.

10 Le losange



D devient $\Delta = [-1, 1]^2$ et $|J| = \frac{1}{2}$ (voir le cours). L'intégrande vaut u^2 :

$$\iint_D (x + y)^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u^2 \, du \int_{-1}^1 dv = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{2}{3}.$$

Réponse : $\frac{2}{3}$.

11 Un quart de disque



En polaires, $\theta \in [0, \pi/2]$ et $r \in [0, 1]$, $xy = r^2 \cos \theta \sin \theta$:

$$\iint_D xy = \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Réponse : $\frac{1}{8}$.

12 Une couronne



En polaires, $r \in [1, 2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, et $\frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{r^2}$:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \frac{1}{r^2} r dr = 2\pi [\ln r]_1^2 = 2\pi \ln 2.$$

Réponse : $2\pi \ln 2$.

13 Volume sous un paraboloïde



La surface rencontre $z = 0$ sur le cercle $r = 2$. En polaires :

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (4 - r^2) r dr d\theta = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 = 2\pi(8 - 4) = 8\pi.$$

Réponse : 8π unités de volume.

14 Moment sur un tétraèdre



À z fixé, la section est un triangle rectangle de côté $1 - z$, d'aire $\frac{(1 - z)^2}{2}$. Donc

$$\iiint_T z dV = \int_0^1 z \frac{(1 - z)^2}{2} dz = \frac{1}{2} \int_0^1 (z - 2z^2 + z^3) dz = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{24}.$$

Réponse : $\frac{1}{24}$.

15 Intégrale de Gauss

★★★★

Par produit d'intégrales indépendantes, $I^2 = \int e^{-x^2} dx \int e^{-y^2} dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$. En polaires sur le disque de rayon R : $\pi(1 - e^{-R^2}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \pi$ (voir le cours). Donc $I^2 = \pi$, et comme $I > 0$, $I = \sqrt{\pi}$. Par parité, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

16 Moment d'inertie d'une boule

★★★★

En sphériques, $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$:

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^2 \rho^2 \cdot \rho^2 d\rho = 2\pi \times 2 \times \frac{32}{5} = \frac{128\pi}{5}.$$

Réponse : $\frac{128\pi}{5}$.

17 Volume d'un cône

★★★★

En cylindriques, $r \leq z \leq 3$ avec $r \in [0, 3]$:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^3 \int_r^3 r dz dr d\theta = 2\pi \int_0^3 r(3-r) dr = 2\pi \left(\frac{27}{2} - 9 \right) = 9\pi.$$

C'est bien un cône de rayon $R = 3$ et de hauteur $h = 3$: $\frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 3 = 9\pi$.

Réponse : 9π .

18 Inertie d'un cylindre

★★★★

En cylindriques, $r \in [0, 2]$, $z \in [0, 5]$: $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^5 dz \int_0^2 r^2 \cdot r dr = 2\pi \times 5 \times 4 = 40\pi$.

Réponse : 40π . (Formule générale : $\frac{\pi h a^4}{2}$.)

19 Centre de masse d'une demi-boule

★★★★

En sphériques, $\varphi \in [0, \pi/2]$. Volume : $2\pi \times 1 \times \frac{R^3}{3} = \frac{2\pi R^3}{3}$. Ensuite $z = \rho \cos \varphi$:

$$\iiint_H z dV = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho = 2\pi \times \frac{1}{2} \times \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Donc $\bar{z} = \frac{\pi R^4/4}{2\pi R^3/3} = \frac{3R}{8}$. Pour $R = 4$: $\bar{z} = \frac{3}{2}$.

20 Boule percée par un cylindre

★★★★

En cylindriques, $0 \leq r \leq 1$ et $-\sqrt{4-r^2} \leq z \leq \sqrt{4-r^2}$:

$$V = 2\pi \int_0^1 2\sqrt{4-r^2} r dr = 4\pi \left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{4\pi}{3} (8 - 3\sqrt{3}).$$

Réponse : $\frac{4\pi(8 - 3\sqrt{3})}{3} \approx 11,75$.

21 Aire d'une ellipse

★★★★

Le jacobien vaut $\begin{vmatrix} 3 \cos \theta & -3r \sin \theta \\ 2 \sin \theta & 2r \cos \theta \end{vmatrix} = 6r$, et E correspond à $r \in [0, 1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Aire
 $= \int_0^{2\pi} \int_0^1 6r dr d\theta = 6\pi$. Ensuite $x^2 = 9r^2 \cos^2 \theta$:

$$\iint_E x^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 54r^3 dr = \pi \times \frac{54}{4} = \frac{27\pi}{2}.$$

Le livre d'exercices corrigés de maths Licence L2

Tout le programme en un seul PDF de 128 pages, à imprimer ou à garder sur ta tablette.

Voir le livre



Entraîne-toi : défi express de Licence L2

Changer de niveau

Niveau : Licence L2

6 questions au hasard, correction tout de suite.



Lancer le défi



Zyro te conseille la suite



Exercices de maths

Intégrales doubles et triples : exercices de maths Licence L2



QCM de maths

Intégrales doubles et triples : QCM de maths Licence L2



Contrôles de maths

Intégrales doubles et triples : contrôle de maths Licence L2



Exercices de maths

Équations différentielles : exercices de maths Licence L2



Exercices de maths

Probabilités sur un univers dénombrable : exercices de maths Licence L2



QCM de maths

Équations différentielles : QCM de maths Licence L2

Zyro vous emmène sur nos sites partenaires

Embarquez pour d'autres planètes du savoir et leurs applis.

Décollage